# الرياضيات القابلة للفهم

## لتلاميذ المدارس الابتدائية والإعدادية

د.عمار شرقية



بسم الله الرحمن الرحيم

# الرياضيات التأسيسية القابلة للفهم

## لتلاميذ المدارس الابتدائية والإعدادية

د.عمار شرقية

*Errors, like straws upon the surface flow*

*He who would search for pearls must dive below*

*John Dryden*

الأخطاء كالقش تطفوا على سطح الماء

من يبحث عن اللآلئ عليه أن يغوص في الأعماق

جون درايدن

هذا الكتاب موجه بشكل رئيسي لآباء تلاميذ المرحلتين الابتدائية و الإعدادية وهو معد لأشخاص لا يمتلكون أي خلفية تذكر في مادة الرياضيات باستثناء إتقان العمليات الأربعة و قد اعتمدت في تأليفه على أسلوب الخوض في تفاصيل العمليات الرياضية و التعليق على كل خطوة و التكرار الدائم للمعلومة الحاسمة و عرض الفكرة ذاتها من زوايا مختلفةبالإضافة إلى التركيز على كيفية استخدام الآلة الحاسبة باعتبار أنها المرجع الذي يمكننا من التحقق من صحة أية عملية أو مقولة رياضية و على اعتبار أنه من العار أن نمتلك آلات حاسبة في هواتفنا المحمولة و حواسيبنا دون أن نعرف كيف نستخدمها مع محاولة ربط المفاهيم الرياضية بالحياة العملية حتى يدرك التلميذ مدى أهمية الأشياء التي يتعلمها و أنها ليست مجرد طلاسم مقيتة لا فائدة منها يحفظها عن ظهر قلب ثم يتقيأها على ورقة الامتحان و ينساها بعد ذلك ...

و إن شاء الله سأعمل على إصدار جزء ثاني ,ربما يكون بعنوان مختلف , في العام الدراسي القادم و سأعمل على أن يتناول الجزء الثاني بالإضافة إلى الأساسيات الرياضية أساسيات الفيزياء و الكيمياء.

والله ولي الحمد و التوفيق

# إجراء العمليات الحسابية على الأرقام العشرية

إن الأمر الأكثر أهمية عند إجراء العمليات الحسابية على الأرقام العشرية يتمثل في ضرورة صف الأعداد و الفواصل العشرية تحت بعضها البعض بحيث يتم طرح أو إضافة كل خانة من مثيلاتها أي أن يتم طرح و جمع الآحاد مع الآحاد و العشرات مع العشرات و المئات مع المئات وهكذا , وفي حال كان الرقمين العشريين الذين نقوم بطرحهما أو جمعهما مع بعضهما البعض غير متساويين في عدد الخانات (المراتب) عندها نضيف صفرا واحدا أو عدة أصفار بحيث نتمكن من رصف الرقمين العشريين تحت بعضهما البعض.

□ نبدأ بإجراء العمليات الحسابية على الأرقام العشرية من اليمين باتجاه اليسار.

مثال:

ما هو ناتج جمع 12.34 مع 9.9 ؟

12.34+9.9

كما تلاحظون فإنه في العدد 9.9 لدينا فاصلة عشرية تحصر ورائها خانة العشرات تسعة و تسعة بالعشرة أما في الرقم الثاني فإن الفاصلة العشرية تحصر ورائها خانتين .

نبدأ برصف الرقمين العشريين و حتى نتمكن من رصف الفواصل تحت بعضها البعض فإننا نضيف صفرا للعدد 9.9 فيصبح 9.90 بحيث تتناسب الفواصل مع بعضها :

12.34

+ 9.90

نقوم برصف الرقمين بدءا من الجهة اليمنى :

4+0=4

3+9=12

نضع 2 في النتيجة و نحمل العدد واحد إلى الخانة التالية فيصبح لدينا :

1+2+9=12

نضع 2 في النتيجة و نحمل واحد إلى الخانة التالية فيصبح لدينا :

2=1+1

فتصبح النتيجة :

12.34+9.90=22.24

تأكد باستخدام الآلة الحاسبة من أن 12.43+9.9= 22.24

□ لا تنسى أن تنزل الفاصلة العشرية إلى النتيجة كذلك.

□ أهم شيء يتمثل في أن نرصف الفواصل العشرية في الرقمين بحيث تكون إحداهما تحت الآخرى و في حال كان الرقمين العشريين غير متناسبين فإننا نضيف صفرا حتى يتحقق هذا الأمر.

# عمليــة طرح الأرقام العشريــة

ما هي نتيجة طرح 22.33 من 189.766 ؟

نلاحظ بأن الفاصلة في المطروح تقع بعد عددين من الجهة اليمنى 33. بينما تقع الفاصلة على بعد ثلاث خانات أو ثلاثة أعداد من المطروح منه 766.

و لذلك فإن إجراء عملية الطرح يتطلب منا أن نضيف صفرا إلى يمين المطروح منه فيصبح 330. , و بذلك نتمكن من رصف هذين الرقمين العشريين تحت بعضهما البعض بحيث تتوضع الفاصلة في المطروح منه فوق فاصلة المطروح تماما :

189.766

22.330

ثم نبدأ بإجراء عملية طرح اعتيادية ابتداء من الجهة اليمنى .

لا تنسى أن تنزل الفاصلة إلى النتيجة .

و بالطبع في حال كان العدد المطروح منه أقل من المطروح : سبعة ناقص تسعة مثلا , فإننا نستعير له واحد من الخانة التالية وبذلك يصبح العدد سبعة سبعة عشر 17 بينما تنقص الخانة التالية عددا واحدا بعد أن استعرنا منها عددا واحدا .

# ضرب الأعداد العشرية

عند ضرب الأعداد العشرية ببعضها البعض فإننا نتبع الخطوات التالية :

نقوم بعد الخانات التي تقع بعد الفاصلة العشرية في كلا طرفي عملية الضرب.

مثال :

لدي الرقمين العشريين أربعة بالألف 0.004 و اثنين فاصل اثنين بالعشرة 2.2 : في الرقم الأول لدي ثلاث خانات بعد الفاصلة العشرية وهذه الخانات تشغلها الأعداد 004. , وفي الرقم الثاني 2.2 لدي عدد واحد أو خانة واحدة بعد الفاصلة العشرية 2.

إذا فإن لدي في كلا الرقمين أربع خانات :

3+1=4

إن هذا يعني بأنه يتوجب علي أن أزيح الفاصلة في النتيجة أربع خانات إلى الجهة اليسرى.

الآن أقوم بإجراء عملية ضرب اعتيادية و كأنه ليست لدي أية فواصل فأقول :

4×22=88

و كما رأينا سابقا فإن لدي أربع خانات بعد الفاصلة العشرية و الصفر العشري فتصبح النتيجة :

0088

لأني أضيف أربع خانات ابتداء من الجهة اليمنى و بما أنه ليس لدي إلا عددين لأملأ بهما هذه الخانات الأربعة فإنني أملأ الخانات الناقصة بأصفار .

و بعد أن تصبح لدي أربع خانات ابتداء من الجهة اليمنى أضع فاصلة عشرية و أضع بعدها صفرا فتصبح لدي النتيجة التالية :

0.0088

تأكد عن طريق الآلة الحاسبة من صحة النتيجة حتى تتبين صحة هذه الطريقة.

□ في الأرقام العشرية يمكنك إضافة أصفار إلى يمين الفاصلة العشرية أو إلى يسار العدد الناتج دون أن يؤثر ذلك على النتيجة.

□ يمكنك أن تضيف أصفارا في الأرقام العشرية ما بين العدد أو الأعداد الواقعة أقصى اليسار و بين الفاصلة العشرية دون أن يؤثر ذلك على النتيجة.

□ خطوات ضرب الأرقام العشرية مع بعضها البعض:

قم بعد الخانات الواقعة بعد الصفر اليساري و الفاصلة العشرية في كلا الرقمين .

مثال $0.04 \times 0.033$

في الرقم العشري الأول 0.04 لدينا خانتين 04.
أما في الرقم الثاني فلدينا ثلاث خانات 033.

**اجمع عدد الخانات الواقعة بعد الفاصلة العشرية في كلا العددين.**

خانتين +ثلاث خانات يساوي خمس خانات

$2+3=5$

نضرب الرقمين مع بعضهما البعض مع إهمال الفواصل العشرية و الأصفار اليسارية:

$33\times4=132$

**نضع نتيجة الضرب ابتداء من أقصى الجهة اليمنى و نحرص على أن يكون لدينا عدد خانات في النتيجة مساوي لمجموع عدد الخانات التي سبق لنا أن قمنا بعدها و قلنا أنها خمس خانات.**

**نملأ الخانات الفارغةبعد النتيجة بأصفار وبعد أن تصل إلى عدد الخانات المطلوب نضع فاصلة عشرية و نضع صفرا إلى يسارها.**

**نتحرك دائما من الجهة اليمنى باتجاه الجهة اليسرى.**

**قلنا بأن لدينا خمس خانات و لدينا ثلاثة أعداد في النتيجة وهي 132 , إذا ينقصنا صفرين ليكتمل عندنا عدد الخانات ولذلك نضيف صفرين إلى الجهة اليسرى من العدد 132**

**00132 و بذلك يصبح لدينا رقم مؤلف من خمس خانات.**

**الآن نضيف فاصلة عشرية في آخر العدد و نضع بعدها صفر.**

**0.00132**

**و هي نتيجة عملية الضرب.**

لماذا نضيف فاصلة و صفر في آخر الرقم ؟

من الطبيعي أن نضيف فاصلة وصفر في آخر هذا الرقم لأنه رقم عشري ولو أزلنا الفاصلة العشرية منه فإنه لا يعود رقما عشريا .

**طريقة التدوين العلمي للأرقام -الصيغة العلمية لكتابة الأرقام scientific notation**

طريقة التدوين العلمية للأرقام و تعرف كذلك باسم فهرس التدوين القياسي Standard index notation و غالبا ما يستخدم الباحثون هذه الطريقة في كتابة الأرقام المتناهية الكبر أو المتناهية الصغر و التي تنتهي بعدد كبير من الأصفار و أنا أعرف بأن معظمكم كان يقف حائرا أمام فهم طريقة الكتابة هذه , ولكني أعدكم بأن تتقنوا استخدام هذه الصيغة بعد قراءتكم لهذه الفقرة.

طريقة التدوين العلمي هي طريقة في كتابة الأرقام على شكل رقم مختصر مضروبا بالعدد عشرة.

مثال :

**نعبر عن العدد 8 بطريقة التدوين العلمي بثمانية مضروبة بالعدد عشرة مرفوعا للقوة صفر .**

$8\times10^{0}$

**و بالطبع فإن عشرة مرفوعة للقوة صفر تساوي واحد .**

$10^{0}=1$

**و لهذا السبب فإن العدد 8 مضروبا يعشرة مرفوعة للقوة صفر يساوي 8 مضروبا بالعدد واحد يساوي 8 .**

$8\times10^0=8\times1=8$

□ أي عدد و أي رقم مرفوع للقوة صفر فإنه يساوي واحد .

مليون مرفوع للقوة صفر تساوي واحد .

$1000000^0=1$

عشر ملايين مرفوعة للقوة صفر تساوي واحد .

$10000000^0 = 1$

تمرين :

جرب أن ترفع أي رقم للقوة صفر لتتأكد بأن النتيجة ستكون واحد .

كيف أرفع أي رقم لأية قوة على الآلة الحاسبة ؟

اكتب بأزرار الآلة الحاسبة الرقم الذي تريد رفعه لقوة معينة و ليكن مثلا الرقم 700 .

اضغط الزر $X^Y$ .

اكتب بأزرار الحاسبة العدد أو الرقم الذي يمثل القوة التي تريد رفع الرقم السابق لها و ليكن مثلا صفر .

اضغط المساواة = لتحصل على النتيجة :

700 مرفوعة للقوة صفر تساوي واحد .

$700^0=1$

عودة لموضوع طريقة التدوين العلمية scientific notation:

نعبر عن الرقم 30 بطريقة التدوين العلمي بالعدد 3 مضروبا بالعدد عشرة مرفوعا للقوة واحد .

$30=3\times10^1$

3 ضرب عشرة مرفوعة للقوة واحد تساوي 3 ضرب عشرة تساوي 30

$30=10\times3=10^1\times3=30$

أي عدد نرفعه للقوة واحد تكون النتيجة العدد ذاته .

مثال : مليون مرفوعة للقوة واحد تساوي مليون .

$1000000^1=1000000$

تمرين :

عن طريق الآلة الحاسبة تأكد وفق طريقة الرفع للقوة التي تقدم ذكرها بأن نتيجة رفع أي عدد أو أي رقم للقوة واحد تساوي ذلك العدد نفسه .

رفع أي رقم للقوة واحد تعني بأننا نضرب هذا الرقم بالعدد واحد .

رفع أي رقم للقوة 2 تعني أن نضرب ذلك الرقم بنفسه :

مثال 5 مرفوعة للقوة 2 تساوي 5 ضرب 5 .

$5^2=5\times5=25$

تحذير :

انتبه جيدا إلى أن رفع أي رقم للقوة صفر لا يعني بأن نضرب ذلك الرقم بالصفر .

□ خطوات كتابة أي رقم بطريقة التدوين العلمي :scientific notation

كيف نعبر عن الرقم 9000000 بطريقة التدوين العلمي؟

نقول بأن الرقم 9 ملايين أي 9000000 يساوي 9 ضرب مليون :

$9000000=9\times1000000$

و كما ذكرت سابقا فإن طريقة التدوين العلمي تحتم علي للتعبير عن رقم ما أن اكتبه على صورة عدد مضروبا بعشرة مرفوعة لقوة ما .

كيف أعبر عن المليون على شكل عشرة مرفوعة لقوة ما ؟

**تعلمون بأن الرقم مليون يحوي ستة أصفار , و هذا يعني بطريقة التعبير العشرية بأن المليون عبارة عن عشرة مرفوعة للقوة ستة .**

$10^6=1000000$

**تأكد بأن عشرة مرفوعة للقوة السادسة تساوي مليون:**

**ادخل العدد عشرة إلى الآلة الحاسبة.**

**اضغط زر الرفع للقوة $X^Y$**

**اضغط زر العدد 6 : لأننا نريد رفع العدد عشرة للقوة السادسة.**

**اضغط زر المساواة =**

ستحصل على الرقم مليون.

إذا فإن عشرة مرفوعة للقوة السادسة هي بالفعل تساوي مليون.

إذا فإن المليون بطريقة التعبير العشرية ليس إلا عشرة مرفوعة للقوة ستة .

فإذا كان ذلك هو المليون فكيف تكون التسعة ملايين ؟

التسعة ملايين تساوي مليون ضرب 9 .

$1000000 \times 9 = 9000000$

و بطريقة التدوين العلمي فإن التسعة ملايين تساوي :

تسعة مضروبة في العدد عشرة مرفوعا للقوة ستة.

$10^6 \times 9 = 9000000$

لأن عشرة مرفوعة للقوة ستة تساوي مليون .

تأكد عن طريق الآلة الحاسبة بأن 9 ملايين تساوي 9 مضروبة في عشرة مرفوعة للقوة 6 .

نضغط على العدد 9 في الآلة الحاسبة.

نضغط إشارة الضرب ×.

ندخل العدد 10 .

نضغط زر الرفع للقوة $X^Y$

**نضغط الزر 6 لأننا نريد رفع الرقم 10 للقوة 6 .**
**نضغط زر يساوي = فنحصل على النتيجة .**

إن الطريقة السابقة في استخدام الآلة الحاسبة ستمكنك بعد اليوم من تحويل أي صيغة علمية تقابلك في حياتك اليومية إلى رقم اعتيادي.

تمرين :

باستخدام الآلة الحاسبة حول التدوينة العلمية $598\times10^4$ إلى رقم اعتيادي.

حل التمرين :

باستخدام أزرار الآلة الحسبة أكتب الرقم 598 .

اضعط زر إشارة الضرب × ( أحيانا يمكن أن يكون على شكل نجمة أو نقطة ).

ادخل الرقم عشرة.

اضغط زر الرفع للقوة $X^Y$ .

اضغط العدد 4 , لماذا؟

لأننا نريد أن نرفع العدد عشرة للقوة الرابعة .

اضغط على زر المساواة = فأحصل على النتيجة.

يمكنك أن ترفع العدد عشرة لأية قوة بنقرتين فقط على الآلة الحاسبة وذلك عن طريق زر رفع العدد عشرة للقوة وهو الزر $10^x$

كم تساوي عشرة مرفوعة للقوة الثامنة؟

$10^8$

ندخل العدد 8 إلى الآلة الحاسبة.

نضغط زر رفع العدد عشرة للقوة أي الزر $10^x$

نحصل على النتيجة مئة مليون 100000000

$10^8$=100000000.

$10^8$= مئة مليون .

إذا فإن كل ما علينا القيام به هو أن نضغط العدد الذي يمثل القوة التي نريد أن نرفع العدد عشرة إليها ثم أن نضغط على ز رفع العدد عشرة للقوة $10^x$.

تمرين :

كم تساوي التدوينة التالية:

$3\times10^7$

3 ضرب عشرة مرفوعة للقوة السابعة.

أولا نحسب $10^7$ باستخدام الآلة الحاسبة بإحدى الطريقتين :

الطريقة الأولى:

ندخل العدد عشرة إلى الآلة الحاسبة.

نضغط زر الرفع للقوة $X^Y$

نضغط زر العدد 7 : لأننا نريد رفع العدد عشرة للقوة السابعة.

نضغط زر المساواة =

نحصل على النتيجة عشرة ملايين 10000000.

إذا فإن $10^7$ تساوي عشرة ملايين .

الطريقة الثانية :

نضغط زر العدد سبعة لأننا نريد رفع العدد عشرة للقوة السابعة .

نضغط زر رفع العدد عشرة للقوة $10^x$

نحصل على النتيجة عشرة ملايين 10000000.

الآن نقول :

$10000000 \times 3 = 30000000$

ثلاثين مليون , إذا فإن :

$3 \times 10^7$ تساوي 30 مليون.

$3 \times 10^7 = 3 \times 10000000$ تساوي 30000000

إذا لحساب قيمة التدوينة العلمية قمنا أولا بحساب قيمة العدد عشرة المرفوعة للقوة ثم ضربنا الناتج بالعدد و هو هنا العدد 3 فحصلنا على قيمة التدوينة العلمية .

## ■ الرفع للقوة السالبة -الرفع لأس سالب : negative exponent

الرفع للقوة الموجبة : الرفع لأس موجب يعني عدد المرات التي يتوجب علينا أن نضرب قيمة ما بنفسها , على سبيل المثال :

العدد 5 مرفوع للقوة الموجبة 3 أي 5 أس 3 يعني بأن علي أن أضرب العدد 5 بنفسه ثلاث مرات :

$5^3=5\times5\times5=125$

هنا العدد 5 يدعى بالأساس أو القاعدة Base.

العدد 3 يدعى بالأس exponent أو القوة power أو الدالة index .

نقول هنا بأن العدد 5 مرفوع للقوة ثلاثة

5 to the power 3

| |
|---|
| العلاقة $A^n$ أي القيمة A مرفوعة للقوة n تعني بأن علينا أن نضرب القيمة A بنفسها n مرة . $A^n=A\times A\times A....$ $A\times A\times A....=n$ |

كان ذلك هو الرفع للقوة الموجبة أو الرفع لعدد موجب positive exponents .

و الآن نأتي إلى مفهوم الرفع إلى قوة سالبة Negative Exponents :

| |
|---|
| **الرفع إلى قوة سالبة هو عكس الرفع إلى قوة موجبة فإذا كنا في حال الرفع للقوة الموجبة نضرب العدد بنفسه n مرة فإننا في حال الرفع للقوة السالبة نقسم العدد على نفسه n مرة .** **Nبالطبع هي قيمة الأس .** |

| |
|---|
| مثال العدد خمسة مرفوع للقوة ناقص واحد يساوي واحد تقسيم 5 . $5^{-1}=1\div5=0.2$ ارفع العدد خمسة للقوة ناقص واحد : ادخل العدد 5 إلى الآلة الحاسبة . اضغط زر الرفع للقوة $X^Y$ |

اضغط العدد واحد لأننا نريد رفع العدد خمسة للقوة الأولى.

اضغط زر تبديل الإشارة ± لأننا نريد الآلة الحاسبة أن تعلم بأن العدد واحد هو عدد سالب.

اضغط زر المساواة = فتحصل على النتيجة 0.2.

إذا فإن خمسة مرفوعة للقوة ناقص واحد $5^{-1}$ تساوي 0.2

الآن لنتأكد بأن خمسة مرفوعة للقوة ناقص واحد $5^{-1}$ تساوي واحد تقسيم خمسة:

نقسم خمسة على واحد:

$5/1=0.2$

$5÷1=0.2$

إذا فإن خمسة مرفوعة للقوة ناقص واحد $5^{-1}$ تساوي خمسة تقسيم واحد.

$0.2×5=1$

مثال: العدد خمسة مرفوع للقوة ناقص 4 يساوي واحد تقسيم خمسة تقسيم خمسة تقسيم خمسة تقسيم خمسة (أربع مرات)

$5^{-4}=1÷5÷5÷5÷5=0.0016$

و بطريقة أخرى فإن العدد خمسة مرفوع للقوة ناقص أربعة يساوي العدد واحد تقسيم 5ضرب 5 ضرب 5ضرب 5 (أربع مرات)

و كما تعلمون فإن خمسة مضروبة بنفسها خمسة مرات تساوي واحد تقسيم خمسة مرفوعة للقوة 4 تساوي واحد على 625 يساوي 0.0016

$5^{-4}=1÷(5×5×5×5)= 1/5^4= 1/625=0.0016$

**و بشكل أكثر وضوحا فإن علينا أن نتذكر دائما بأن الأعداد المرفوعة لقوى سلبية هي أصغر من الواحد.**

وعلينا أن نعلم بأن أي عدد مرفوع لقوة سالبة يساوي واحد تقسيم ذلك العدد مرفوعا لقوة غير سالبة:

$5^{-4}=1\div5^{4}$

فالعدد خمسة المرفوع للقوة ناقص أربعة يساوي بكل بساطة واحد تقسيم خمسة مرفوعة للقوة الرابعة.

كيف نحسب القوة السالبة باستخدام الآلة الحاسبة؟

لنفترض بأننا نريد حساب 5 مرفوعة للقوة ناقص 4 :

$5^{-4}$

ندخل العدد 5 إلى الآلة الحاسبة.

نضغط زر الرفع للقوة $X^{Y}$

نضغط زر العدد 4 : لأننا نريد رفع العدد 5 للقوة الرابعة.

نضغط زر تبديل الإشارة ± و ذلك حتى تعلم الآلة الحاسبة بأننا نريد أن يكون العدد 4 عدد سالب .

نضغط زر المساواة =

نحصل على النتيجة 0.0016.

طريقة ثانية لحساب القوة السالبة باستخدام الآلة الحاسبة :

ذكرت سابقا بأن رفع عدد ما لقوة سلبية ما يساوي :

العدد واحد تقسيم ذلك العدد مضروبا بنفسه عددا من المرات تساوي القوة التي رفعنا إليها ذلك العدد:

فالعدد 5 المرفوع للقوة ناقص أربعة 4- يساوي :

واحد تقسيم 5 ضرب 5 ضرب 5 ضرب5 ضرب 5

$5^{-4}=1\div(5\times5\times5\times5)$

و أنتم تعلمون بالطبع بأن 5 مضروبة بنفسها 4 مرات تعني 5 مرفوعة للقوة الرابعة أي $5^4$

و بالتالي فإن خمسة مرفوعة للقوة ناقص أربعة $5^{-4}$ تساوي واحد تقسيم 5 مرفوعة للقوة الرابعة $5^4$ و لحساب تلك القيمة على الآلة الحاسبة نقوم بالآتي:

نضغط العدد واحد 1

نضغط زر عملية التقسيم ÷ أو الزر (سلاش) الخط المائل /

نضغط الزر 5 : وهو يمثل العدد المرفوع إلى القوة السالبة.

نضغط زر الرفع للقوة $X^Y$

نضغط العدد 4 لأنه يمثل القوة السالبة التي رفعنا إليها العدد 5 .

نضغط زر المساواة =

نحصل على النتيجة 0.0016

تذكر دائما :

أي عدد مرفوع لقوة سالبة يساوي العدد واحد تقسيم ذلك العدد مرفوعا لقوة غير سالبة.

يمكننا حساب الأعداد المرفوعة لقيم سلبية على الآلة الحاسبة بشكل مباشر وذلك عن طريق استخدام زر تبديل الإشارة ± بعد إدخال قوة ذلك العدد للآلة الحاسبة.

يمكننا حساب الأعداد المرفوعة لقيم سلبية على الآلة الحاسبة بشكل غير مباشر وذلك عن طريق تقسيم العدد

**واحد على ذلك العدد بعد أن نعتبر بأنه مرفوع لقوة موجبة أي دون أن نستخدم زر تبديل الإشارة ±.**

استخدامات الرفع للقوى السالبة :

من بين استخداماتها الأخرى الكثيرة فإن الرفع للقوى السالبة يستخدم بكثرة في مجال الصيدلة و الكيمياء الحيوية و ذلك لدراسة تأثير مقادير متناهية الصغر من مركبات كيميائية على الخلايا و الكائنات الحية .

و بذلك نكون قد تعلمنا طرق حساب القوة السالبة .

## الأولوية في إنجاز العمليات الرياضية :

الأولوية دائما في إجراء العمليات الحسابية هي لما بين الأقواس أيا يكن نوع الأقواس .

تشير كلمة " بيمداس " PEMDAS إلى ترتيب العمليات الحسابية :

P = Parentheses = العمليات بين الأقواس .

E = Exponents = الرفع للقوة ( الأس).

M =Multiplication = عمليات الضرب.

D=Division = القسمة

A = Addition الجمع

S=Subtraction = الطرح

لاحظ بأن عمليتي الضرب و القسمة لهما الأولوية ذاتها و كذلك فإن عمليتي الجمع و الطرح لهما الأولوية ذاتها .

| □ إذا وجدت عملية رياضية محصورة بين قوسين من أي نوع ضمن عملية رياضية أخرى شاملة فإن هذا يعني بأن علي أن أبدأ أولا بالأعداد الموجودة ضمن الأقواس فأجري العملية الرياضية عليها ثم انتقل ثانيا لما هو خارج الأقواس. |
|---|

مثال "

$5+(10+5)+13$

في المثال السابق لدي عملية رياضية صغرى محصورة بين قوسين $(10+5)$ و هذه العملية تقع ضمن عملية رياضية أشمل منها و هذا يعني بأن علي أن أبدأ أول بإجراء العملية التي بين القوسين $(5+10)$ فأجد حاصل جمع العددين $5+10$ أولا .

مثال على ترتيب إجراء العمليات الرياضية :

$(2\times3^{4}-6)\times2$

قوس 2 ضرب 3 مرفوع للقوة 4 ناقص6 قوس ضرب 2 .

نقوم بإجراء العمليات في المعادلة السابقة وفق الأولويات التي تحدثنا عنها سابقا فنبدأ أولا بإجراء العمليات المحصورة بين القوسين $(2\times3^{4}-6)$.

انتبه جيدا :

قلت سابقا بأن الأولوية الأولى هي لإجراء العمليات المحصورة بين القوسين و الأن هل أبدأ بإجراء العمليات بين الأقواس من اليسار إلى اليمين ؟

كلا, لأن لدي أولوية ثانية بين الأقواس و هي الأولوية المتعلقة بفك الرفع للقوة : أي أن علي أن أفكك 3 المرفوعة للقوة الرابعة أولا :

$3^4=3\times3\times3\times3=81$

- الأولوية تكون دائما للعمليات الموجودة بين قوسين , أي أننا نبدأ في كل معادلة رياضية بالعمليات المحصورة بين قوسين ثم نقوم بإجراء العمليات على الأعداد المرفوعة للقوة .

- بعد أن نجري جميع العمليات داخل الأقواس نقوم بإجراء العمليات خارج الأقواس.

- داخل الأقواس لا نجري العمليات من اليسار إلى اليمين بشكل اعتباطي و إنما نقوم بإجرائها وفق الأولويات التي ذكرتها سابقا : أي أننا نبدأ بفك الأعداد المرفوعة للقوة ثم نجري عمليات الضرب و القسمة ثم عمليات الجمع و الطرح.

- بعد الانتهاء من إجراء جميع العمليات داخل الأقواس نتجه لما هو خارج الأقواس لنبدأ بإجراء العملية الأكثر أولوية و هي عملية الرفع للقوة (الأس) ثم عمليتي الضرب و القسمة ثم عمليتي الجمع و الطرح.

مثال :

$3+5\times5$

في هذا المثال لدينا عمليتين : عملية جمع و عملية ضرب , و كما تعلمون فإن عملية الضرب تمتلك أولوية

على عملية الجمع لذلك فإننا نبدأ أولا بإجراء عملية الضرب :

$5\times5=25$

و بعد ذلك نجري عملية الجمع الأدنى من حيث الأولوية فنقول :

$25+3=28$

مثال :

$2+2^3$

2 زائد 2 مرفوعة للقوة 3 .

في المثال السابق لدي عمليتين و هما عملية جمع و عملية رفع للقوة و كما تعلمون فإن عملية الرفع للقوة ذات أولوية أعلى من عملية الجمع و لذلك فإننا نبدأ أولا بحل الرفع للقوة فنكتب :

$2^3=2\times2\times2=8$

2 مرفوعة للقوة 3 يساوي 2 ضرب2 ضرب 2 تساوي 8 .

و بعد ذلك نقوم بإجراء عملية الجمع فنكتب :

$2+8=10$

□ ماذا لو كان لدينا في المعادلة الرياضية أقواس ضمن أقواس -أقواس داخل أقواس؟

مثال :

$2^5+\{3-1|(5+5)+4\}$

2 مرفوعة للقوة 5 + قوس كبير 3 ناقص 1 قوس صغير يحوي العملية 5+5 ثم +4

في المثال السابق لدينا قوس صغير ضمن قوس كبير و كما تعلمون فإن الأولوية تكون للعمليات الواقعة ضمن

القوس الصغير أي (5+5) و ذلك أقوم بإجراء هذه العملية أولا فأكتب :

$(5+5)=(10)$ .

و بعد أن قمت بإجراء العملية الموجودة ضمن القوس الصغير اتجه لإجراء العمليات ذات الأولوية الأدنى و هي العمليات الموجودة داخل القوس الكبير :

$$\{3-1|(10)+4\}$$

أنظر إلى داخل القوس الكبير فأجد عمليتي طرح و جمع , و كما تعلمون فإن لعمليتي الطرح و الجمع الأولوية ذاتها و عندما أجد عمليتين لهما الأولوية ذاتها مثل عمليتي الجمع و الطرح أو الضرب و القسمة فإنني أبدأ بإجراء العملية الموجودة في الجهة اليسرى و اتجه بشكل طبيعي في إجراء العمليات الرياضية نحو الجهة اليمنى.

- العدد الذي يوضع قبل أي نوع من الأقواس دون وجود أي إشارة يعني بأنه يتوجب ضرب هذا العدد بنتيجة العملية المحصورة بين القوسين.

مثال:

$3(10-5)$

وجود العدد 3 خارج قوس يحوي عملية رياضية يعني بأن علي أن أضرب هذا العدد بنتيجة العملية المحصورة بين القوسين:

$3(10-5)=3\times(10-5)$

بالطبع و كما تعلمون فإن علي أن أقوم بهذه العملية وفق التسلسل الرياضي بحيث أبدأ أولا بإنجاز العملية

ذات الأولوية الأعلى , و كما تعلمون فإن الأولوية القصوى تعطى دائما لما بين الأقواس و لذلك فإنني أبدأ بطرح العدد 5 من العدد 10 فأحصل على العدد 5 ثم أقوم بعد ذلك بإجراء عملية الضرب:

$$3(5) = 3\times5=15$$

كيف أميز الآلة الحاسبة العلمية من الآلة الحاسبة التجارية ؟

إذا أدخلت المعادلة التالية $3+2\times5=$

3 زائد 2 ضرب 5 إلى آلة حاسبة فإن الآلة الحاسبة العلمية ستقوم أولا بإجراء عملية الضرب $5\times2=10$ , لأن عملية الضرب كما تحدثنا سابقا لها الأولوية على عملية الجمع, و بعد إجراء عملية الضرب فإن الآلة الحاسبة العلمية ستقوم بإجراء عملية الجمع $10+3=13$ و ستعطيك الاجابة 13 .

أما الحاسبة التجارية فإنها ستجري العمليات الحسابية من اليسار إلى اليمين بدون أولويات فتبدأ بإجراء عملية الجمع $3+2=5$ ثم تجري عملية الضرب بعد ذلك $5\times5=25$ و بذلك فإن الحاسبة التجارية ستعطيك الاجابة 25 .

## إجراء العمليات الرياضية على الأعداد السالبة

فائدة الأعداد السلبية :

نستخدم الأعداد السلبية للتعبير عن الأشياء التي كلما ازدادت كان ازديادها نقصا و خسارة و لهذا السبب فإننا نعبر بالأعداد السلبية عن الخسائر و الديون و الغرامات و الضرائب , و أنت حتى تعرف موقفك المالي النهائي فلا بد من أن تجمع أرباحك و خسائرك و الضرائب المترتبة عليك , و لكنك عندما تسجل أرباحك و رصيدك فإنك تسجلها كأعداد موجبة أي أنك لا تضع قبلها أي إشارة أو أنك تضع إشارة الموجب + قبلها , أما الخسائر و الديون و الفواتير الواجبة السداد و الغرامات و الضرائب فإنك تقوم بتسجيلها على شكل أعداد سلبية حيث أنك تضع قبلها إشارة ناقص – .

و عندما نقوم بحساب موقفنا المالي فإننا نجمع أرباحنا و خسائرنا أي أننا نقوم بجمع الأعداد الموجبة مع الأعداد السالبة , غير أن عملية الجمع في مثل هذه الحالة أي عندما تحوي عملية الجمع أعداد موجبة و أعداد سالبة فإنها لا تكون عملية جمع فعلية و إنما فإنها تكون عملية جمع وهمية ظاهرية بينما تكون في الحقيقة عملية طرح بكل ما تعنيه الكلمة من معنى و بذلك فإننا نطرح خسائرنا و الفواتير و الديون و الضرائب المترتبة علينا من الأرباح فنتبين بذلك موقفنا المالي الحقيقي.

 عملية جمع عدد سالب مع عدد موجب هي عملية طرح هذين العددين من بعضهما البعض .

9 + (-2) = 9-2=7

تسعة زائد 2 سلبي تساوي 9 ناقص2 = 7

لاحظ كيف أن عملية جمع العدد الموجب 9 مع العدد السالب -2 كانت بمثابة عملية طرح.

$2+(-2)=2-2=0$

موجب2 زائد 2 سالب تساوي 2 ناقص 2 تساوي صفر .

لاحظ كيف أن عملية جمع العدد الموجب 2 مع العدد السالب 2- كانت بمثابة عملية طرح.

$7+(-7)=7-7=0$

لاحظ كيف أن عملية جمع العدد الموجب 7 مع العدد السالب 7- كانت بمثابة عملية طرح.

$100+(-50)=100-50=50$

لاحظ كيف أن عملية جمع العدد الموجب 100 مع العدد السالب 50- كانت بمثابة عملية طرح.

$500 + (-100)=500-100=400$

لاحظ كيف أن عملية جمع العدد الموجب 500+ مع العدد السالب 100- كانت بمثابة عملية طرح.

$300 +(-200)=300-200=100$

لاحظ كيف أن عملية جمع العدد الموجب 300+ مع العدد السالب 200- كانت بمثابة عملية طرح.

لاحظ في الأمثلة السابقة كيف أننا حولنا عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب إلى عملية طرح اعتيادية و قمنا بإزالة إشارة الناقص .

 الآن , اتفقنا على أن عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب هي عملية طرح و أننا عندما نجمع عدد موجب مع عدد سالب فإننا نزيل إشارة الناقص التي تسبق العدد

السالب و نجري عملية طرح اعتيادية يكون الناتج فيها عددا موجبا , ولكن :

ماذا يحدث لو أنني قلبت عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب إلى عملية طرح ثم اكتشفت بأن المطروح أكبر من المطروح منه ؟

مثال :

100+(-500)

في المثال السابق لدينا الرقم الموجب 100 الذي قمنا بجمعه مع الرقم السالب -500 و كما ذكرت سابقا فإننا في عمليات جمع عدد موجب مع عدد سالب نزيل إشارة السالب و نحول عملية الجمع إلى عملية طرح فيصبح لدينا الآتي :

100-500=

لاحظ بأن المطروح 500 أكبر من المطروح منه 100 فكيف نتصرف في مثل هذه الحالة ؟,

إننا نتخيل الأمر و كأن شخصا لديه 100 جنيه و عليه ديون و ضرائب و فواتير مستحقة الدفع و خسائر تبلغ 400 جنيه , و هذا الشخص سيحاول أن يبقي رصيده فوق مستوى الصفر ما أمكنه ذلك غير أن لديه فجوة مقدارها 500 جنيه هي عبارة عن ديون و خسائر و فواتير بينما هو لا يمتلك إلا 100 جنيه و لذلك فإنه يسدد بهذه المئة جنيه بعضا من ديونه و يدفع بعضا من الفواتير المترتبة عليه و بذلك فإنه يردم قليلا تلك الفجوة , و لكنه لا يستطيع الوصول إلى مستوى الصفر و لا يستطيع الصعود إلى ما فوق الصفر , لماذا ؟

لأنه بقي عليه سداد 400 جنيه حتى يردم كل الفجوة المالية و يصل إلى مستوى الصفر .

إذا فإننا نعبر بكل بساطة عن هذه المسألة بأن تكون نتيجة الطرح سلبية فنكتب:

$100-500=(-400)$

100 ناقص 400 تساوي ناقص 400

المزيد من الأمثلة :

$10+(-30)=10-30=(-20)$

10 زائد ناقص 30 يساوي 10 ناقص 30 يساوي ناقص20

في المثال السابق لدينا عملية جمع عدد موجب هو العدد 10 مع عدد سالب هو العدد ناقص 30 و بما أن عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب هي بمثابة عملية طرح اعتيادية فقد قمت بإزالة إشارة السالب من العدد ناقص30 ثم قمت بتحويل عملية الجمع إلى عملية طرح و لكن المطروح منه أي العدد 10 أقل من العدد المطروح أي العدد 30 , بمعنى أن الرصيد الذي أمتلكه أي العدد المطروح منه 10 لا يغطي إلا ثلث العدد المطروح أي 30 و لقد حاولت البقاء فوق مستوى الصفر أو عند الصفر دون جدوى لأن رصيدي 10 لم يكفي إلا لتغطية ثلث الخسائر 30 و لذلك فقد كانت نتيجة ذلك خسارة مقدارها -20 أو 20 تحت الصفر.

- عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب هي بمثابة عملية طرح.
- في عمليات جمع عدد موجب مع عدد سالب أقوم بإزالة الإشارات و تحويل عملية الجمع إلى عملية طرح.
- عند تحويل عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب إلى عملية طرح يجب أن يكون المطروح منه دائما هو العدد الموجب أي ( الرصيد ) لأني دائما أطرح الخسارات و الغرامات و الضرائب و الديون من الرصيد لأني أدفع الخسائر و الغرامات و الديون و الضرائب من الرصيد و ليس العكس.

| |
|---|
| □ عندما أقوم بتحويل عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب إلى عملية طرح فإن الأولوية تعطى دائما لمحاولة الوصول إلى الصفر و ردم الفجوة التي تقع تحت الصفر فإذا تمكنت من إغلاق تلك الفجوة كانت النتيجة إما الصفر أو عدد موجب و إن لم أتمكن من ردم تلك الفجوة كانت النتيجة سلبية. |

□ كيف أعرف ما هي الإشارة التي سأضعها لنتيجة عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب ( هل هي إشارة موجبة أو إشارة سالبة ) ؟

لمعرفة ذلك الأمر علي أن أحرص دائما على أن يكون العدد الموجب هو المطروح منه في عملية الطرح و أن انتبه إلى أن لا أفعل العكس .

مثال :

$$90+(-100)=90-100=(-10)$$

90 (موجبة ) زائد ناقص 100- يساوي 90 ناقص 100 يساوي ناقص 10 .

أزلنا الإشارات و حولنا عملية الجمع إلى عملية طرح .

كان المطروح منه هو العدد الموجب 90+ أما المطروح فقد كان العدد السالب ناقص100 و هذا هو الأصل لأننا دائما نطرح الخسائر و الديون و الضرائب (سالب) من رأس المال ( موجب) حتى نتبين موقفنا المالي .

ولو كانت الصورة معكوسة و كان المطروح منه هو العدد السالب فإنني إذا أزلت الإشارات و أجريت عملية طرح فإن النتيجة لن تكون صحيحة و لذلك احرص دائما على أن يكون العدد الموجب هو المطروح منه.

ببساطة شديدة فإنني سألت نفسي في عملية الطرح السابقة : كم ينقص العدد 90 حتى يصبح مئة ؟

و بالطبع فإن ما ينقصه هو عشرة و لذلك سجلت النتيجة ناقص عشرة $-10$ .

الأن لنفترض بأن لدي عملية الجمع التالية :

$75+(-50)=75-50=25$

75 زائد ناقص 50 يساوي 75 ناقص50 يساوي 25 .

أزلت الإشارات ثم حولت عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب إلى عملية طرح و كانت النتيجة موجبة هي 25 لأن المطروح منه 75 أكبر من المطروح 50 أي أنه كانت لدي زيادة فوق الصفر مقدارها 25 نتجت عن عملية الطرح و لم يكن لدي أي نقص.

كما تعلمون جميعا فإن عملية الجمع الاعتيادية هي عملية تبديلية :

$30+50=50+30$

$30+50=80$

$50+30=80$

أي أن ناتج عملية الجمع لا يتغير بتغيير ترتيب الأعداد الداخلة فيها .

**هل عملية جمع عدد سالب مع عدد موجب هي عملية تبديلية لا تتغير نتائجها بتبديل الأعداد الداخلة فيها ؟**

$(-10)+9=(-1)$

$9+(-10)=(-1)$

ناقص 10 زائد موجب تسعة يساوي ناقص واحد

موج تسعة زائد ناقص 10 يساوي كذلك ناقص واحد

مثال آخر :

$$(-40)+20=(-20)$$

$$20+(-40)=(-20)$$

ناقص 40 زائد موجب عشرين يساوي ناقص 20

20 موجب زائد ناقص 40 يساوي كذلك ناقص 20

مثال ثالث:

$$(-100)+25=(-75)$$

$$25+(-100)=(-75)$$

ناقص100 زائد 25 يساوي ناقص 75

موجب 25 زائد ناقص 100 يساوي ناقص75 .

🗁من الملاحظ في الأمثلة السابقة بأن عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب هي عملية تبديلية بمعنى أن نتيجتها لا تتغير عندما نقوم بتبديل مواقع الأعداد فيها .

🗁 إجراء عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب على الألة الحاسبة :

الكثيرين منا لا يعرفون بأن إجراء العمليات الحسابية على الأعداد السالبة هو أمر في غاية البساطة إذ يكفي أن تضغط على زر تغيير الإشارة قبل إدخال العدد السالب.

تنبيه : و لكن عليك الحذر إلى أنه في بعض الآلات الحاسبة يتوجب عليك ضغط زر تغيير الإشارة بعد إدخال العدد السالب و ليس قبله فإذا أردت ان أحسب ناتج جمع 9 مع ناقص 2 فإني اتبع الخطوات التالية :

اضغط زر العدد 9 : تتعامل الآلة الحاسبة بشكل افتراضي مع كل عدد أقوم بإدخاله على أنه عدد موجب و لذلك لا يتوجب علي أن اضغط أي زر عند إدخال عدد موجب.

اضغط زر عملية الجمع+

اضغط زر العدد 2

اضغط زر تبديل الإشارة ±

اضغط زر يساوي =

فأحصل على النتيجة.

ما هو زر تبديل الإشارة؟ إنه الزر الذي تجد عليه إشارتي الموجب و السالب ± .

±

🗁 الأن أصبح بإمكانك أن تتأكد من صحة أي تمرين يتعلق بإجراء العمليات الرياضية على الأعداد السالبة عن طريق الآلة الحاسبة كما أصبح بإمكانك اكتشاف أخطاء تلك العمليات و أصبحت لديك وسيلة إثبات صحة أو خطأ أي قاعدة تعلق بالعمليات الحسابية على الأعداد السالبة .

## 🗁 جمع عددين سالبين من بعضهما البعض

:

عملية جمع عددين سالبين من بعضهما البعض هي بمثابة عملية جمع للخسائر , فمثلا عندما تقول : اليوم خسرت 100 جنيه ثم خسرت 25 جنيه , أو عندما تقول اليوم دفعت ضريبة قدرها 100 جنيه ثم دفعت فاتورة كهرباء قدرها 25 جنيه فهذا يعني بأنك خسرت من رأس المال125 جنيه , أي أن المسألة ليست إلا مسألة تراكم خسائر أي أنها مسألة نقص و خسارة ثم زيادة في النقص و الخسارة و لهذا السبب فإننا نعبر عن النتيجة بعدد سالب:

$$(-100)+(-25)=(-125)$$

سالب 100 ناقص سالب 25 يساوي ناقص125

إن عملية جمع عدد سالب مع عدد سالب آخر ليست إلا عملية جمع للخسائر.

قضت حرائق الغابات على 50 شجرة في الصباح ثم قضت على 25 شجرة فكم أصبح عدد الخسائر التي تسبب بها الحريق من الأشجار؟

$$(-50)+(-25)=(-75)$$

ناقص 50 زائد ناقص 25 يساوي ناقص75

انخفضت درجة الحرارة عشر درجات مئوية تحت الصفر ثم انخفضت خمس درجات مئوية أخرى:

$$(-50)+(-10)=(-60)$$

ناقص 50 زائد ناقص 10 يساوي ناقص60 .

كما رأينا سابقا فإن عملية طرح أعداد سلبية من بعضها البعض ليست إلا تراكم خسائر و زيادة في النقص.

□ ضرب الأعداد السالبة و الموجبة:

□ قاعدة ضرب الأعداد السالبة و الموجبة :

موجب × موجب = موجب

موجب×سالب= سالب

سالب×موجب=سالب

موجب×موجب=موجب

كقاعدة عامة :

عند ضرب عددين ذوي إشارة واحدة أي عددين سالبين أو موجبين تكون النتيجة موجبة .

عند ضرب عددين ذوي إشارتين مختلفتين أي عدد سالب × عدد موجب تكون النتيجة سالبة.

أمثلة عملية :

موجب×موجب= موجب

$5\times5=25$

موجب×سالب= سالب

$5\times(-5)=(-25)$

5 موجب ضرب 5 سالب يساوي ناقص 25 .

سالب × موجب = سالب

$(-7)\times3=(-21)$

ناقص 7 ضرب 3 موجب يساوي ناقص 21 .

سالب ×سالب=موجب

$(-5)\times(-20)= 100)$

5 سالب ×20 سالب = موجب100 .

□ مراجعة عامة لمفهوم الأعداد السالبة و العمليات عليها :

□ هنالك لعبة أوراق لعب (كوتشينة ) شائعة يتم تسجيل الربح فيها على شكل عدد موجب بينما يتم تسجيل الخسارة فيها على شكل عدد سالب و في نهاية هذه اللعبة فإن الفائز في هذه اللعبة يتحدد عن طريق طرح الأعداد السالبة (الخسائر ) من الأعداد الموجبة ( الأرباح) .

□ من الظواهر التي يمكن أن تساعدنا على استيعاب مفهوم الأعداد السالبة و الأعداد الموجبة ظاهرة البرودة و الحرارة : نزول درجة الحرارة إلى ما دون الصفر و صعودها فوق الصفر .

□ بشكل افتراضي فإن كل عدد لا تسبقه إشارة ناقص هو عدد موجب إذ ليس هنالك أي داعي لوضع إشارة موجب + قبل العدد الموجب.

□ إن عملية طرح الأعداد الموجبة من بعضها البعض تماثل عملية جمع عدد سالب مع عدد موجب.

مثال:

إذا كان لديك 9 جنيهات ثم أضعت 6 جنيهات فكم بقي معك ؟

يمكنني أن أعبر عن هذه المسألة باستخدام عددين موجبين و عملية طرح اعتيادية فأقول:

9-6=3

9 ناقص6 يساوي 3 .

استخدمنا عددين موجبين و عملية طرح اعتيادية .

يمكننا أن نعبر عن الفكرة ذاتها بعملية جمع و ليس بعملية طرح و ذلك باستخدام عدد موجب للإشارة إلى الأموال التي كانت معي 9 جنيهات و استخدام عدد سالب للإشارة إلى الأموال التي أضعتها أي6 جنيهات فأقول : كان معي 9 جنيهات (موجب) ثم أضعت 6 جنيهات(سالب) فيتبقى لدي 3 جنيهات (موجب) و هي معي الآن .

$9+(-6)=9-6=3$

9 زائد ناقص6 يساوي 3 (موجب) .

تخيل بأن الشخص المفلس الذي لا يمتلك أي مال و الذي ليست عليه أية ديون موقفه عند الصفر (الصفر هو الحد الفاصل بين الأعداد السلبية و الأعداد الموجبة)

الخسارة و الاستدانة و الفواتير و الغرامات تحت الصفر (سلبي) .

الربح و رأس المال : فوق الصفر (موجب) .

□ طرح عدد سالب من عدد موجب هو بمثابة عملية جمع :

$7-(-3)=7+3=10$

7 موجب ناقص 3 سالب يساوي 7 +3 يساوي10 موجب .

لاحظ بأن عملية طرح عدد سالب من عدد موجب هي بمثابة عملية جمع .

$10-(-7)=10+7=17$

10 ناقص 7 سالب = 17 موجب

□ إن طرح عدد سالب من عدد موجب يماثل التخلص من دين أو غرامة أو خسارة.

**□ لماذا إضافة عدد سالب إلى عدد موجب تعني الطرح؟**

**لأن إضافة عدد سالب تعني نقصا في رصيدك بمقدار معين يقربه من الصفر أو يدنو به إلى ما دون الصفر.**

$10+(-3)=7$

10 زائد ناقص3 يساوي 7 .

مثال :

سائق سيارة معه 100 جنيه قام بمخالفة قوانين السير ولذلك تعرض لغرامة قدرها 30 جنيه : إن هذا يعني بأن المبلغ الذي يحمله هذا السائق قد نقص بمقدار 30 جنيه و أصبح 70 جنيه , و بالطبع فإننا نعبر عن الغرامة بعدد سالب.

$100+(-30)=(70)$

100 جنيه زائد ناقص 30 يساوي 70

□ طرح عدد سلبي من عدد موجب هو بمثابة عملية جمع:

$50-(-50)=100$

50 موجب ناقص سالب50 تساوي 100موجب

طرح عدد سلبي هو بمثابة إضافة عدد موجب :

يعني طرح عدد سلبي بأنك قد نجوت من خسارة ما محققة أو أنه قد تم إعفائك من دفع دين ما أو ضريبة أو غرامة ومن الطبيعي بأن تحصل لديك زيادة إيجابية مماثلة للدين أو الخسارة أو الغرامة التي رفعت عنك لأن موقفك المالي الحالي لابد أن يكون متأثرا بذلك

الدين أو تلك الخسارة أو تلك الغرامة : لنفترض بأن رصيدك كان مليون جنيه ثم حكمت عليك المحكمة بأن تدفع غرامة قدرها نصف مليون جنيه - إن هذا يعني بأن رصيدك قد أصبح نصف مليون جنيه ,ثم إنك طعنت في حكم المحكمة و صدر حكم جديد بإعفائك من دفع الغرامة التي قدرها نصف مليون دولار فما الذي يعنيه ذلك؟

إن ذلك يعني بأن رصيدك قد أصبح مجددا مليون جنيه .

□ طرح عدد موجب يماثل إضافة عدد سالب : كلما انخفضت درجة الحرارة ازدادت البرودة-كلما نقصت الاضاءة ازدادت درجة الظلمة - كلما نقص الربح أو رأس المال ازدادت الخسائر.

□ إضافة عدد سالب تماثل طرح عدد موجب : زيادة الخسائر تعني زيادة في نقص رأس المال.

□ عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب هي عملية طرح:

$30+(-10)=30-10=20$

لاحظ كيف أن عملية جمع عدد موجب مع عدد سالب هي بمثابة عملية طرح.

30 زائد ناقص10 يساوي 30 ناقص10 يساوي 20 (النتيجة عدد موجب) لأنه بعد إجراء عملية الطرح بقي لدينا 20 فوق الصفر.

إذا كان لدينا رصيد يزيد عن الصفر تكون النتيجة موجبة و إن لم يكن لدينا رصيد كافي لتغطية الخسارة و النقص تكون النتيجة سالبة.

□ حتى لا تنسى قواعد ضرب الأعداد السلبية :

□ لماذا يكون حاصل ضرب عددين سالبين عدد موجب؟

Why two negative make a positive?

لأن نفي النفي إيجاب , فإن قال لك أحدهم : " إياك أن تذهب" فإن هذه الجملة تحوي نفيا واحدا يحمل معنا سلبيا وهو : النهي عن الذهاب, و لكن إن قيل لك : " إياك أن لا تذهب" فإن هذه الجملة تحتوي على نفيين و هي تحمل معنى النهي عن عدم الذهاب أي أنه قد طلب منك أن تذهب ( نفي×نفي=إيجاب)

□ حتى تتذكر للأبد قواعد ضرب الأعداد السلبية :

تعرف المقولة الصادقة الشهيرة :

صديق صديقك صديقك و صديق عدوك عدوك و عدو صديقك هو عدوك و عدو عدوك هو صديقك.

الآن برأيك إذا طلب منا أن نضع إشارة سالب أو موجب للعدو و إشارة سالب أو موجب للصديق فكيف سنتصرف؟

إن المنطق يفرض علينا دائما أن نضع إشارة الموجب+ للأشياء الإيجابية الجيدة و أن نضع إشارة سالب - للأشياء و المفاهيم السلبية السيئة , أي أنه يتوجب **علينا أن نضع إشارة موجب للصديق و إشارة سالب للعدو و الأن لنطبق المثل السابق على قواعد ضرب الأعداد السلبية:**

**□ صديق صديقك صديقك : موجب ضرب موجب يساوي موجب .**

**ناتج ضرب عدد موجب مع عدد موجب يساوي عدد موجب.**

$4\times5=20$

4 ضرب5 يساوي 20 .

□ صديق عدوك هو عدوك : موجب ضرب سالب يساوي سالب.
ناتج ضرب عدد موجب مع عدد سالب يساوي عدد سالب.
$7\times(-3)=(-21)$
7 ضرب ناقص3 يساوي ناقص21
$5\times(-4)=(-20)$
5ضرب ناقص4 يساوي ناقص 20.
□ عدو صديقك هو عدوك : سالب ضرب موجب يساوي سالب.
ناتج ضرب عدد سالب مع عدد موجب يساوي عدد سالب.
$(-5)\times3=(-15)$
ناقص5ضرب3 يساوي ناقص15.
□ عدو عدوك هو صديقك : سالب ضرب سالب يساوي موجب.
ناتج ضرب عددين سالبين هو عدد موجب.
$(-6)\times(-3)=18$
ناقص6 ضرب ناقص3 يساوي 18 (موجب) طبعا .
$(-4)\times(-3)=12$
ناقص 4 ضرب ناقص3 يساوي12 موجب.

و بذلك نكون قد أنهينا بحث إجراء العمليات الحسابية على الأعداد السالبة.

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

# الكسور Fractions

□ شكل الكسر : عبارة عن عددين يفصل بينهما خط ندعو العدد الموجود في أعلى الخط بالبسط بينما ندعو العدد الموجود في أسفل الخط بالمقام, و يمكننا تمثيل الكسر بعددين يفصل بينهما خط مائل و على يسار ذلك الخط نضع البسط بينما نضع المقام على يمين الخط و هي الطريقة التي سنتبعها هنا تجنبا لاختلاط الرموز و الحروف مع بعضها البعض.

□ مفهوم الكسر :

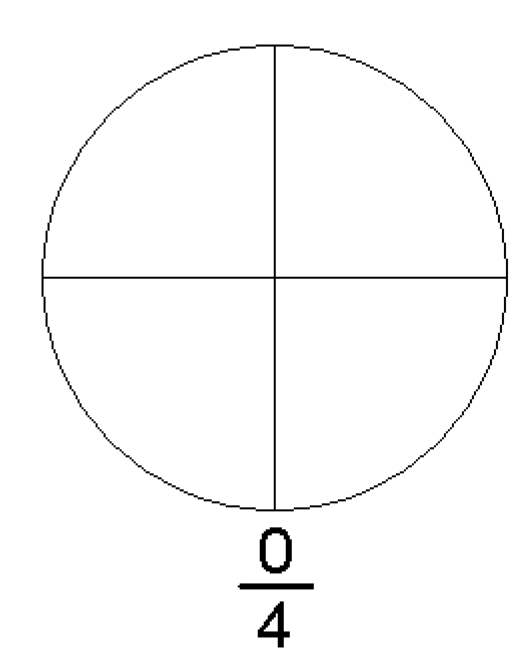
المقام : يخبرنا المقام إلى كم جزء تم تقسيم الكل .

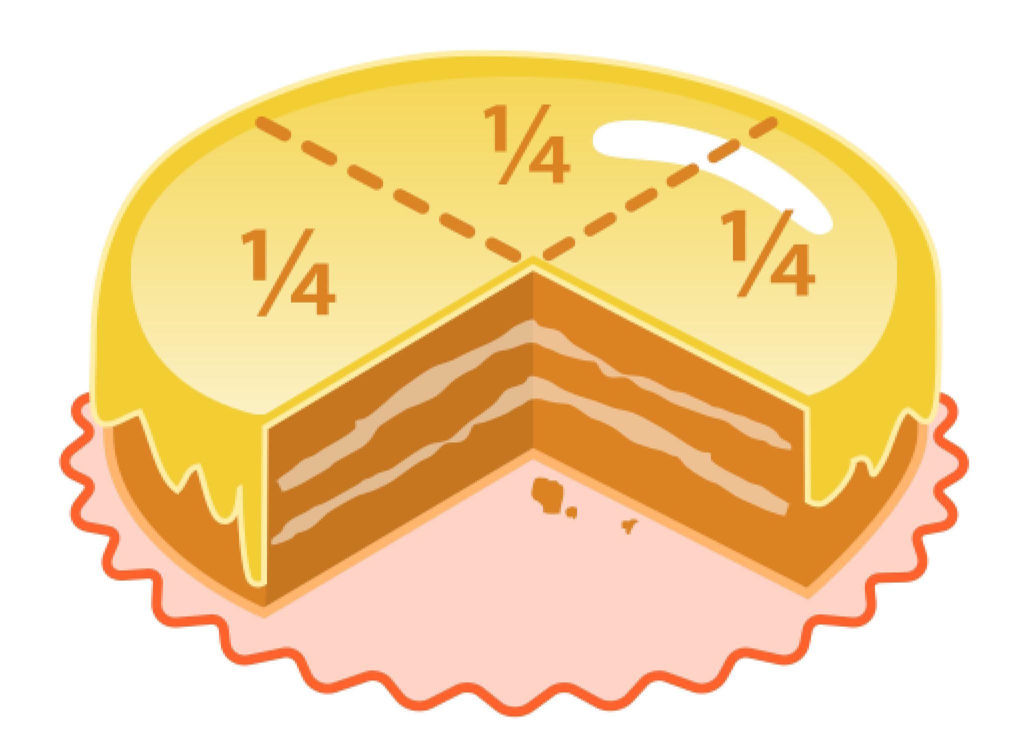
البسط : يخبرنا البسط كم جزءا لدينا فعليا من الكل.

مثال :

لتكن لدينا بطيخة مثلا قمنا بتجزئتها إلى ثمانية أجزاء و قمنا بتمثيل ذلك على شكل كسر: الكسر 2/8 يخبرنا المقام 8 بأننا قمنا بتجزئة البطيخة إلى ثمانية قطع متساوية , بينما يخبرنا البسط 2 بأننا حصلنا على قطعتين فقط من الثمانية قطع .

لنفترض بأن لدينا قطعة أرض و قمنا بتقسيمها إلى عشرة أجزاء و حصلنا منها على 3 أجزاء فإننا نمثل ذلك بالكسر 3/10 حيث يشير المقام و الذي يمثله هنا العدد 10 إلى أننا قمنا بتجزئة قطعة الأرض هذه إلى عشرة أجزاء, بينما يشير البسط و الذي يمثله هنا العدد 3 إلى أننا قد حصلنا فعليا على ثلاثة أجزاء من قطعة الأرض المؤلفة من عشرة أجزاء.




□ يتعامل كل من البسط و المقام مع أجزاء متساوية من الشيء المقسوم .

□ قاعدة :

إذا كان البسط أكبر من المقام فإن هذا يعني بأن الكسر أكبر من العدد واحد .لماذا؟

اتفقنا سابقا بأن كلا من البسط و المقام يشيران إلى أجزاء متساوية من الشيء المقسوم و أن المقام يشير إلى عدد الأجزاء المتساوية التي قمنا بقسمة ذلك الشيء إليها بينما يشير البسط إلى عدد الأجزاء التي حصلنا عليها بشكل فعلي من ذلك الشيء , الآن لنفترض بأن لدي بطيخة و قمت بقسمتها إلى نصفين أي جزئين ثم قلت بأن لدي ثلاثة أجزاء أو ثلاثة أقسام أو ثلاثة أنصاف من تلك البطيخة و كتبت ذلك على الشكل التالي : $3/2$ أو $\frac{3}{2}$ اي أن البسط الذي يمثله العدد 3 كان أكبر من المقام الذي يمثله العدد 2 فما الذي يعنيه ذلك؟

إن هذا يعني بأني أمتلك ثلاثة أنصاف من البطيخ أي أنني أمتلك بطيخة و نصف أي واحد و نصف , أي أن هذا الكسر أكبر من العدد واحد .

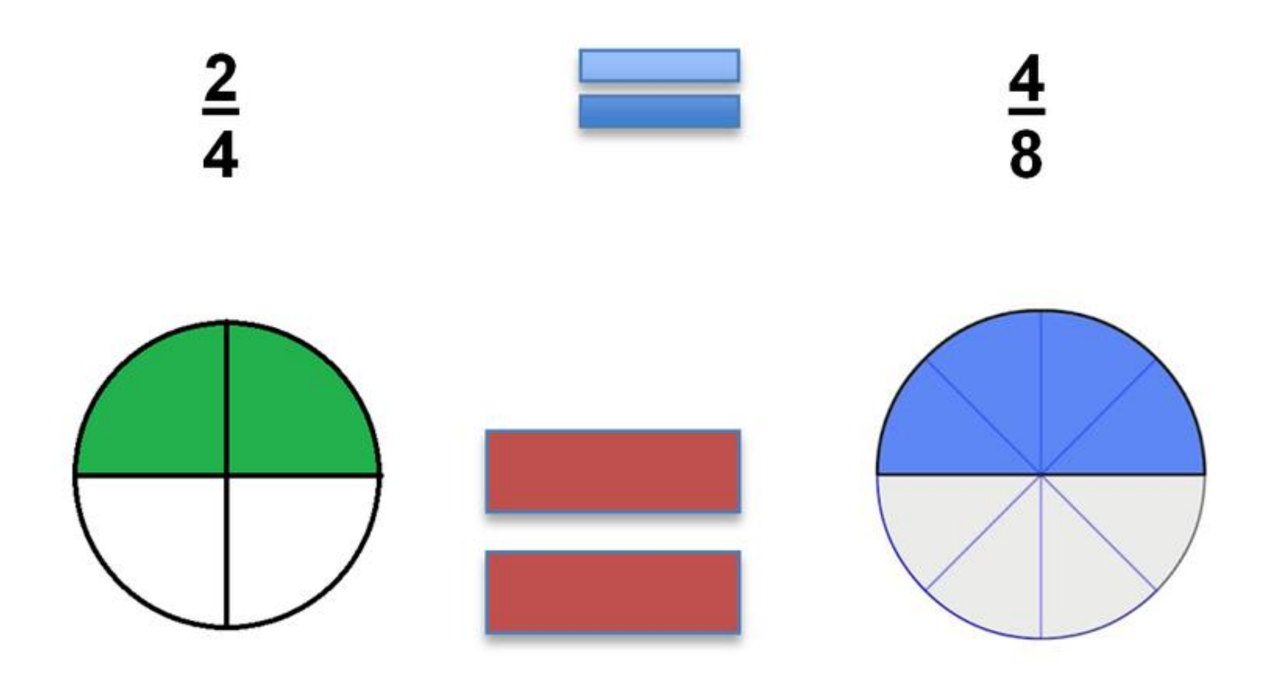
□ إذا كان البسط و المقام عددين متماثلين فإن ذلك يعني بأن هذا الكسر مساوي للعدد واحد ,لماذا؟

إذا كانت لدي بطيخة و قمت بقسمتها إلى خمسة أجزاء فإن ذلك يعني بأن تلك الأجزاء الخمسة التي قسمت إليها البطيخة تساوي العدد واحد , أي بطيخة واحدة و لو أني أعدت جمع تلك الأجزاء الخمسة مع بعضها البعض فإنني سأحصل على بطيخة واحدة كاملة, أي أنني سأحصل على العدد واحد.

و الآن لو أنني حصلت على خمسة أجزاء من تلك البطيخة فإن هذا يعني بأني قد حصلت على البطيخة كلها ,أي أنني حصلت على بطيخة واحدة كاملة أي العدد واحد و يمكنني أن اكتب ذلك بشكل كسري على الشكل التالي $5/5$ .

$1 = \frac{5}{5}$

$5/5 = 1$




الكسر الصحيح Proper fraction :

الكسر الصحيح هو الكسر الذي تكون قيمته أقل من واحد .

متى تكون قيمة الكسر أقل من واحد ؟

تكون قيمة الكسر أقل من واحد عندما يكون البسط أقل من المقام , مثل :

2/12 4/11 8/33 5/15 12/77 8/9 1/29 3/9

نلاحظ في جميع امثلة السابقة بأن البسط أصغر من المقام و أن المقام أكبر من البسط و لذلك فإنها جميعا كسور صحيحة قيمتها أقل من الواحد , لماذا؟

تذكر دائما بأن البسط يشير إلى ما أمتلكه بشكل فعلي من الكل فإذا كان البسط أكبر من المقام

مثل 30/6 فإن هذا يعني بأنني أمتلك أكثر من قيمة المقام كما أن هذا يعني بأن قيمة هذا الكسر هي أكبر من الواحد , و إذا كان البسط مساويا للمقام مثل 7/7 فإن هذا يعني بأن هذا الكسر مساوي للواحد , كما أن هذا يعني بأنني أمتلك جميع الأجزاء و إذا كان البسط أقل من المقام مثل 5/9 فإن هذا يعني بأنني امتلك 5 أجزاء فقط من الأجزاء التسعة التي تمت تجزئة الكل إليها كما أن هذا يعني بأن هذا الكسر هو أقل من الواحد .

□ عندما يكون البسط مماثلا للمقام فإن هذا يعني بأن الكسر مساوي للعدد واحد .

مثال 9/9=1 تسعة على تسعة تساوي واحد .

□ عندما يكون البسط أقل من المقام أي عندما يكون المقام أكبر من البسط فإن هذا يعني بأن الكسر هو أقل من العدد واحد , و انتبه جيدا لما يعنيه هذا الأمر : إن هذا الأمر يعني بأن لدي شيئا احدا مقسما فقط فالكسر 3/5 بسطه 3 أقل من مقامه 5 و مقامه 5 أكبر من بسطه 3 و بالتالي فإن هذا الكسر يشير إلى أن هنالك شيئا واحدا فقط مجزئا إلى خمسة أقسام

فإذا اردت تطبيق الكسر $\frac{3}{5}$على أرض الواقع فإنني آتي

ببطيخة واحدة فقط و أقسمها إلى خمسة أقسام ثم آخذ من تلك الأقسام الخمسة ثلاثة أقسام و أقول بأن لدي

3/5 ثلاثة على خمسة $\frac{3}{5}$أو ثلاثة أخماس البطيخة و عندما أرى بأن البسط أصغر من المقام فإن علي أن أعلم بأن هنالك شيئا واحدا فقط مجزئا و أن أعلم علم اليقين بأن هذا الكسر مهما كبرت أرقامه فإنه أقل من الواحد فإذا قلت بأن لدي كسر مقداره نصف مليار على

**مليار فإن هذا الكسر أقل من الواحد و لو رأيت كسرا مقداره 50 ترليون على 100 ترليون فعلي أن أعرف بأن هذا الكسر أقل من واحد.**

متى يكون الكسر مساويا للواحد؟

يكون الكسر مساويا للواحد عندما يكون بسطه مساويا لمقامه أي عندما يكون كل من بسطه و مقامه عددا واحدا :

مثال 2/2=1 2 على2 يساوي واحد .

$1=\frac{2}{2}$

الآن إذا كان البسط أكبر من المقام و إذا كان المقام أصغر من البسط كما هي الحال مثلا في الكسر $\frac{17}{3}$ 17/3 17 على 3 فإن هذا يعني بأن الرصيد الذي هو المقام أي3 لا يغطي البسط لأن البسط أكبر منه و هذا يعني ضمنيا بأن هنالك وحدات أخرى مقسمة أي أنه ليس هنالك شيء واحد مقسم و إنما هنالك عدة أشياء مقسوم كل منها إلى ثلاثة أجزاء و هذا ما يدلنا عليه المقام 3 أما البسط 17 فإنه يشير إلى أننا نمتلك بشكل فعلي 17 جزئا منها.

□ تذكر دائما : عندما يكون البسط أكبر من المقام فبإمكاني أن أجري الحسبة التالية :

يشير البسط إلى عدد القسائم التي أمتلكها بينما يشير المقام إلى عدد الأقسام التي تمت تجزئة كل وحدة إليها :

فإذا أردت تطبيق الكسر 17/3 17 على 3 على ثمار البطيخ فإن هذا الكسر يقول لي بأن لدي عددا من ثمار البطيخ و ليس ثمرة واحدة . لماذا؟

لأن هذا الكسر أكبر من الواحد .

و كيف عرفت بأن هذا الكسر أكبر من الواحد؟

لأن بسطه 17 أكبر من مقامه.

الشيء الثاني الذي يخبرني به البسط 17 هو أن لدي فعليا 17 جزءا متساويا من البطيخ.

المقام 3 يخبرني بأن كل بطيخة قد تمت قسمتها إلى 17 قسما متساويا .

الآن أصبح بإمكاني أن أعرف القيمة الحقيقة لهذا الكسر حيث أني أعرف الآن بأن لدي 17 قسما و أن كل ثلاثة أقسام تساوي واحد أو بطيخة كاملة فلو قسمت عدد الأقسام التي أمتلكها أي العدد 17 على العدد 3 لعرفت عدد الوحدات أو العدد الكلي للبطيخات التي يغطيها البسط و لا يغطيها المقام :

$17 \div 3 = 5$

مع باقي قدره 2 , و هذا يعني بأني امتلك 5 بطيخات و قسمين اثنين , أي أن :

17/3=5 2/3

$\frac{2}{3}5=\frac{17}{3}$

17 على3 تساوي 5 كاملة و 2 على 3.

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

## □ الأرقام المختلطة Mixed Numbers

الرقم المختلط هو مزيج من عدد صحيح و كسر مثال:

5 6/10 $5\frac{6}{10}$ خمسة و ستة على عشرة ¼ 3 ثلاثة و ربع $3\frac{1}{4}$ 3 و 1 على 4 .

الرقم المختلط يشبه أرقام الساعة حيث يكون لدينا دائما عدد كامل و كسر.

يشير الرقم المختلط إلى أن لديك عددا من الوحدات الكاملة من شيء ما وهو ما نعبر عنه بالعدد الصحيح الموجود قرب الكسر , كما يشير الرقم المختلط إلى أن هنالك أجزاء من وحدات أخرى وهو ما نعبر عنه بالكسر الذي نضعه قرب العدد الصحيح.

مثال :

الكسر ¼ 2 2 و ربع يشير إلى أن لدي من شيء ما وحدتين كاملتين و ربع ( بطيختين مثلا و ربع البطيخة ) .

□ إذا كان الكسر مؤلفا من بسط و مقام متماثلين مثال 7/7 سبعة على سبعة أو 22/22

22 على 22 فإن هذا يعني بأن هذا الكسر مساوي للواحد .

في عالم الكسور يمكن كتابة الواحد على شكل كسر متماثل البسط و المقام .

إذا فإن المكافئات الكسرية للعدد واحد هي جميع الكسور التي تتميز بأن بسطها و مقامها متماثلين.

مثال : 22/22 ,6/6 ,5/5 , 4/4 , 3/3 , 2/2 ,75/75...

عندما نضرب أي كسر بكسر مكافئ للعدد واحد , أي عندما نضرب أي كسر بكسر ذو بسط و مقام متماثلين فإن قيمة الكسر لا تتغير و إن تغير شكله الخارجي

فإذا ضربنا الكسر ثلاثة أرباع ¾ مثلا بأي كسر متماثل البسط و المقام فإن قيمة الكسر ¾ لا تتغير و إن تغير شكله حتى إذا ضربناه بكسر مقداره مليون على مليون أو مليار على مليار أو ترليون على ترليون : طالما أننا نضربه بكسر ذو بسط و مقام متماثلين فإن ذلك يماثل ضرب الكسر بالعدد واحد .

إذا ضربنا الكسر بالعدد واحد فإنه يبقى محافظا على شكله و قيمته .

إذا ضربنا الكسر بكسر مكافئ للعدد واحد ( كسر ذو بسط و مقام متماثلين فإن شكل الكسر يتغير , غير أنه يبقى محافظا على قيمته ) .

1/1 يساوي 100/100 يساوي 1000/1000 يساوي 1000000/1000000 يساوي مليار على مليار يساوي ترليون على ترليون يساوي واحد .

| الكسر نصف ½ يعني بأن الكل قد تمت قسمته إلى نصفين متساويين و أنك تمتلك فعليا أحد هذين النصفين. |
|---|

الآن إذا كان لدينا شيئين كاملين أو وحدتين متكاملتين و ليكن هذين الشيئين عبارة عن بطيختين , و الآن إذا قمنا بقسمة كل بطيخة من هاتين البطيختين إلى نصفين متساويين فسيصبح لدينا أربعة أنصاف من بطيختين .

الآن لو أنك أخذت نصف البطيخة الأولى و نصف البطيخة الثانية سيقال كسريا بأنك حصلت على نصفين من أصل أربعة أنصاف أي أنك قد حصلت على نصفين من شيئين مختلفين و سنكتب ذلك على شكل 2 على 4 2/4 $\frac{2}{4}$

و الآن إذا جمعت نصفي البطيخة هذين مع بعضهما البعض فإنك ستحصل على بطيخة كاملة (واحد ) أو وحدة متكاملة أي أنك قد حصلت على نصف الكمية الكلية أي 1 على 2 :

إن كلا الكسرين يعنيان النصف غير أن ½ تعني بأني أمتلك نصف شيء واحد ( نصف بطيخة مثلا) بينما يشير الكسر 2/4 إلى أنني أمتلك نصفي شيئين.

أي نصفي بطيختين مثلا .

## ضرب الكسور Multiplying Fraction

القاعدة الأساسية في ضرب كسرين تقول بأن علينا أن نضرب البسط في البسط و أن نضرب المقام في المقام .

و كما ذكرت سابقا فإننا إذا ضربنا أي كسر بكسر مكافئ للواحد , أي كسر ذو بسط و مقام متماثلين فإن قيمة ذلك الكسر لا تتغير و إن تغير شكله .

مثال:

لدينا الكسر 1 على 2 أي ½ و هذا الكسر يعني النصف كما تعلمون - الآن إذا ضربنا هذا الكسر بأي كسر قيمته واحد و ليكن مثلا الكسر 5/5 5 على 5 فإننا و وفقا لقاعدة ضرب الكسور سنضرب بسط الكسر الأول 1 ببسط الكسر الثاني 5 فنحصل على 5 و سنضرب مقام الكسر الأول 2 بمقام الكسر الثاني فنحصل على 10 و بالتلي فإن حاصل ضرب هذين الكسرين مع بعضهما البعض سيكون 5 على 10 :

$$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{5}$$

5/10 و هو كسر مكافئ كذلك للكسر ½ لأنه يعني النصف كذلك .

و لكن علينا الانتباه إلى أنه في الوقت الذي يعني فيه الكسر ½ أننا نمتلك النصف من شيء مقسوم إلى نصفين أو أننا نمتلك شيئا من شيئين فقط فإن الكسر

5/10 يعني بأننا نمتلك خمسة أجزاء من شيء مؤلف من عشرة أجزاء.

إذا ، عند ضرب كسرين ببعضهما البعض فإننا نضرب بسط الكسر الأول ببسط الكسر الثاني و نضرب مقام الكسر الأول بمقام الكسر الثاني ثم نقوم باختزال الناتج ما أمكننا ذلك.

عند ضرب كسرين فإننا نضرب أعلى الكسر الأول بأعلى الكسر الثاني و نضرب أدنى الكسر الأول بأدنى الكسر الثاني.

المزيد من الأمثلة الترسيخية :

ما هو حاصل ضرب 2/5 × 10/20    10 على 20 ضرب 2 على 5 يساوي

$$\frac{20}{100}=\frac{2}{5}\times\frac{10}{20}$$

نضرب بسط الكسر الأول 2 ببسط الكسر الثاني 10 فنحصل على 20 و نضرب مقام الكسر الأول 5 بمقام الكسر الثاني 20 فنحصل على 100 :

$$2\times10=20$$

$$5\times20=100$$

و بالتالي فإن ناتج ضرب هذين الكسرين ببعضهما البعض هو 20/100 و يمكن أن نختزل هذا الكسر بقسمة حديه على قاسم مشترك و هو هنا العدد عشرة :

$$100\div10=10$$

$$20\div10=2$$

فنحصل على الكسر 2/10 اثنين على عشرة.

# اختزال الكسور Reducing Fraction

لاختزال كسر ما فإننا نبحث عن عدد يقبل القسمة على كل من البسط و المقام .

مثال :

لدينا الكسر 25/50 25 على50 - ما هو العدد الذي يقبل القسمة على كل من 25 و 50 ؟

إنه العدد 5 :

$5\times5=25$

$5\times10=50$

نختزل هذا الكسر بقسمة كل من بسطه و مقامه على 5 فنحصل على 5/10

5/10 = 25/50

$$\frac{5}{10}=\frac{25}{50}$$

اختزل الكسر 400/500 400 على500 .

نلاحظ بأن كلا من البسط و المقام يقبلان القسمة على 50.

$400\div50=8$

$500\div50=10$

و هكذا نكون قد اختزلنا الكسر 400/500 ليصبح 8/10.

$\frac{8}{10}=\frac{400}{500}$

يمكننا متابعة اختزال الكسر 8/10 و ذلك بقسمة كل من بسطه و مقامه على العدد 2 لأن كلا من بسطه و مقامه يقبلان القسمة على 2 .

$8÷2=4$

$10÷2=5$

و بذلك نكون قد اختزلنا الكسر 8/10 ليصبح 4/5 .

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$

| ☐ عند ضرب كسرين ببعضهما البعض يمكنك اختزال بسط الكسر الأول مع مقام الكسر الثاني و يمكنك اختزال مقام الكسر الأول مع بسط المقام الثاني وذلك بقسمتهما على قاسم مشترك.<br>أي أن بإمكاننا اختزال كسرين بشكل تصالبي على شكل حرف X . |
|---|

مثال :

44/25 × 50/22

44 على25 ضرب 50 على 22 .

$\frac{44}{25}\times\frac{50}{22}\ =\frac{2}{1}\times\frac{2}{1}$

$44÷22=2$

$22÷22=1$

$50÷2=2$

$22÷22=1$

لاختزال هذين الكسرين فإنني أقسم بسط الكسر الأول 44 على 22 فأحصل على 2 و اقسم مقام الكسر الثاني 22 على 22 فأحصل على 1 .

ثم أقسم مقام الكسر الأول 50 على 25 فأحصل على 2 و أقسم بسط الكسر الثاني على 22 فأحصل على 1 و بالتالي تكون نتيجة اختزال هذين الكسرين مع بعضهما البعض من اليسار لليمين :

2/1×2/1     2 على 1 ضرب 2 على 1 .

□ تنبيه :

**إياك أن تقوم باختزال بسط الكسر الأول مع بسط الكسر الثاني أو أن تقوم باختزال مقام الكسر الأول مع مقام الكسر الثاني.**

**دائما قم باختزال كسرين بطريقة تصالبية , أي على شكل حرف x وذلك بقسمة بسط الكسر الأول و مقام الكسر الثاني على عدد واحد ثم القيام بقسمة مقام الكسر الأول و بسط الكسر الثاني على عدد واحد .**

و يمكنك في عملية ضرب واحدة أن تختزل بسط من الكسر الأول مع مقام الكسر الثاني و مقام من الكسر الأول مع بسط الكسر الثاني إذا وجدت قاسما مشتركا بينهما :

12/25 ×75/40=2/1 × ¾

$$\frac{20}{25}\times\frac{75}{40}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{4}$$

12 على 25 ضرب 75 على 40 يساوي 2/1 ضرب ¾ .

قسمنا كلا من بسط الكسر الأول 20 و مقام الكسر الثاني 40 على عشرة فحصلنا على 2 و 4.

20÷10=2

$40 \div 10 = 4$

لماذا قسمنا على عشرة؟

لأن 10 هي القاسم المشترك لهذين العددين.

قسمنا كلا من مقام الكسر الأول 25 و بسط الكسر الثاني 75 على 25 لأن 25 هو قاسمهما المشترك :

$25 \div 25 = 1$

$75 \div 25 = 3$

فحصلنا على العددين 1 و 3 .

## □ قسمة الكسور Dividing Fractions

لقسمة كسرين على بعضهما البعض:

اقلب الكسر المقسوم عليه : أي أنني أجعل بسطه مقاما و أجعل مقامه بسط.

أقوم بضرب الكسر المقسوم بمقلوب الكسر المقسوم عليه : لضرب كسرين أضرب بسط الكسر الأول ببسط الكسر الثاني و أضرب مقام الكسر الأول بمقام الكسر الثاني.

بعد إجراء عملية الضرب اختزل نتيجة الضرب و بذلك أحصل على ناتج قسمة الكسرين موضوع عملية القسمة.

مثال :

ما هو ناتج قسمة 3/2 على 5/4 ؟

$3/2 \div 5/4 =$

3 على 2 تقسيم 4 على 3 يساوي

$=\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}$

هنا الكسر الثاني أي 5/4 هو المقسوم عليه .

أقوم بعكس المقسوم عليه 5/4 5 على 4 فيصبح 4/5 4على 5 .

اضرب الكسر المقسوم أي 3/2 بمقلوب المقسوم عليه أي 4/5 .

$=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}$

$=$

أضرب بسط الكسر المقسوم 3 ببسط مقلوب المقسوم عليه 4 :

$4\times3=12$

أضرب مقام الكسر المقسوم 2بمقام مقلوب الكسر المقسوم عليه أي 5 .

$2\times5=10$

إذا نتيجة ضرب الكسر المقسوم على مقلوب الكسر المقسوم عليه هي 12/10

$$\frac{12}{10}$$

اختزل الكسر الناتج بقسمة حديه على قاسم مشترك و هو هنا العدد 2 :

$12\div2=6$

$10\div2=5$

إذا فإن نتيجة قسمة هذين الكسرين بعد الاختزال هي 6/5

6 على 5

$$\frac{6}{5}$$

| إذا فقد قمنا أولا بقلب الكسر المقسوم عليه رأسا على عقب بحيث يصبح البسط مقام و المقام بسط.<br><br>ضربنا الكسر المقسوم بمقلوب الكسر المقسوم عليه : ضربنا البسط بالبسط و المقام بالمقام .<br><br>قمنا باختزال الناتج و ذلك بقسمة كل من بسط و مقام الكسر الناتج على قاسم مشترك. |
|---|

لدينا عملية القسمة التالية :

16/14 ÷ 4/8

16 على 14 تقسيم 4 على 8 .

$=\frac{16}{14}\div\frac{4}{8}$

لقسمة هذين الكسرين على بعضهما البعض فإننا نضرب الكسر الأول بمقلوب الكسر الثاني:

و هذا هو مقلوب الكسر الثاني:

4/8 →8/4

4 على 8 تصبح 8 على 4 .

$$\frac{8}{4}$$

الآن نقوم بضرب الكسر الأول مع مقلوب الكسر الثاني:

16/4 ÷ 4/8 = 16/4 × 8/4 = 4/2 × 2/1 = 8/2

$$=\frac{4}{8}\times\frac{16}{4}=\frac{4}{8}\div\frac{16}{4}$$

16 على4 تقسيم 4 على 8 تساوي 16 على 4 ضرب 8 على 4 تساوي 4 على 2 ضرب 2 على واحد .

قبل إجراء عملية الضرب قمنا باختزال الكسرين فقسمنا كلا من بسط الكسر الأول 16 و مقام الكسر الثاني على 4 لأن هذا العدد هو قاسمهما المشترك فحصلنا على 4 و 2 , ثم اختزلنا مقام الكسر الأول 4 مع بسط الكسر الثاني 8 وذلك بقسمتهما على قاسمهما المشترك 4 فحصلنا على 2 و 1 .

| ثم قمنا بضرب الكسرين الناتجين عن عملية الاختزال , وكما تعلمون فإننا عندما نضرب كسرين ببعضهما البعض فإننا نضرب بسط الكسر الأول مع بسط الكسر الثاني كما نضرب مقام الكسر الأول بمقام الكسر الثاني و بذلك نكون قد انجزنا عملية القسمة. |
|---|

| تذكر دائما : <br> في العمليات التي تتم على كسرين فإننا نجري عملية الاختزال دائما بشكل متصالب x فنختزل بسط الكسر الأول مع مقام الكسر الثاني كما نختزل مقام الكسر الأول مع بسط الكسر الثاني وذلك بقسمة كل من هذين الكسرين على قاسم مشترك. <br> في عمليات ضرب و قسمة الكسور فإننا لا نقوم بتوحيد المقامات. |
|---|

نجري عملية ضرب الكسور على شكل متوازي: نضرب البسط مع البسط و المقام مع المقام.

عندما يكون لدينا كسر واحد فقط فإننا نقوم باختزال ذلك الكسر بقسمة كل من بسطه و مقامه على قاسم مشترك.

# جمع و طرح الكسور

قبل جمع و طرح الكسور لابد من القيام بتوحيد مقامي الكسرين و ذلك للحصول على مقام مشترك موحد common denominator في كلا الكسرين و لتحقيق تلك الغاية فإني أضرب مقامي الكسرين موضوع عملية الطرح أو الجمع بعدد يؤدي إلى توحيد المقامين ولا أنسى بأن أضرب بسطي هذين الكسرين بالعدد ذاته حتى أحافظ على التناسب ما بين البسط و المقام في كلا الكسرين فالأمر الأكثر أهمية هو أن أحافظ على النسبة و التناسب ما بين البسط و المقام.

لنفترض بأن لدي الكسرين واحد على 4 ¼ و تسعة على ثمانية 9/8 و أردت إجراء عملية جمع أو طرح عليهما فإن الخطوة الأولى التي يتوجب علي القيام بها هي توحيد المقامين أربعة و ثمانية و لتوحيد هذين المقامين فإنني أضرب المقام الأول 8 بالعدد 2 فأحصل على 16 و أضرب البسط 9 كذلك بالعدد 2 فأحصل على 18 ثم أضرب المقام الثاني بالعدد 4 فأحصل على 16 و أضرب البسط 1 بالعدد ذاته أي 4 فأحصل على العدد 4 و بذلك يصبح لدي كسرين ذوي مقامين موحدين و هما :

18/16 و 4/16 و لإجراء عملية طرح فإنني ببساطة أطرح بسط الكسر الثاني من بسط الكسر الأول 18 ناقص 4 يساوي 14 بينما أبقي على المقام موحدا :

18/16 - 4/16 = 14/16

$$\frac{14}{16} = \frac{4}{16} - \frac{18}{16}$$

18 على 16 ناقص 4 على 16 يساوي 14 على 16 .

و لإجراء عملية جمع فإنني أجمع البسط مع البسط بينما أبقي المقام كما هو :

18/16 + 4/16 = 22/16

18 على 16 زائد 4 على 16 يساوي 22 على 16 .

$$\frac{22}{16} = \frac{4}{16} + \frac{18}{16}$$

# مقلوب الكسر reciprocal

إن مقلوب الكسر واحد على 2 ½ هو $\frac{2}{1}$ اثنين على واحدو هذا المقلوب يساوي 2 .

إن مقلوب الكسر واحد على ثلاثة 1/3 يساوي ثلاثة على واحد 3/1 و هذا المقلوب يساوي3 .

إن مقلوب الكسر واحد على أربعة ¼ هو أربعة على واحد 4/1 و هذا المقلوب يساوي 4 .

إن مقلوب الكسر واحد على خمسة 1/5 هوخمسة على واحد 5/1 و هذا المقلوب يساوي 5 .

إن مقلوب الكسر واحد على ستة 1/6 هو ستة على واحد 6/1 و هذا المقلوب يساوي 6

إن مقلوب الكسرواحد على سبعة 1/7 هوسبعة على واحد 7/1 و هذا المقلوب يساوي 7

إن مقلوب الكسر واحد على ثمانية 1/8 هو ثمانية على واحد 8/1 و هذا المقلوب يساوي 8 .

إن مقلوب الكسر واحد على تسعة 1/9 هو تسعة على واحد 9/1 و هذا المقلوب يساوي 9 .

إن مقلوب الكسر واحد على عشرة 1/10 هوعشرة على واحد 10/1 و هذا المقلوب يساوي عشرة.

إن مقلوب الكسر واحد على إحدى عشر 1/11 هو إحدى عشر على واحد 11/1 و هذا المقلوب يساوي 11 .

و هكذا إلى ما لا نهاية ....

لماذا 22/1 اثنين و عشرين على واحد تساوي 22 ؟

لماذا ألف على واحد تساوي ألف؟

لماذا 500/1 500 على واحد تساوي واحد ؟

لماذا مليون على واحد تساوي مليون؟

لماذا 5/1 خمسة على واحد تساوي خمسة ؟

لماذا مئة على واحد تساوي مئة ؟

لماذا مليار على واحد تساوي مليار؟

إن كنت لا تعرف الإجابة فهذا يعني بأنك لم تستوعب مفهوم الكسور كما ينبغي .

قلت سابقا بأن البسط إذا كان أدنى من المقام كما في المثال $\frac{3}{8}$ ثلاثة على ثمانية فإن هذا يعني بن هذا الكسر أقل من واحد .لماذا؟

إن الكسر ثلاثة على ثمانية $\frac{3}{8}$ يعني بأن الشيء موضوع الكسر و ليكن بطيخة مثلا هو مقسوم إلى ثمانية أجزاء و أنا لا أمتلك منها إلا ثلاثة أقسام فقط.

أي أنني أحتاج إلى خمسة أقسام أخرى من البطيخة حتى تصبح لدي بطيخة كاملة , أي واحد .

و قلت سابقا بأن البسط إذا كان مماثلا للمقام , كما في المثال 8/8 فإن هذا يعني بأن الكسر مساوي للواحد .لماذا؟

لأن هذا يعني بأن لدي شيء ما (واحد) و ليكن بطيخة وهذا الشيء مقسوم إلى ثمانية أقسام و أنا أمتلك ثمانية أقسام منها : أي أنني أمتلك بطيخة كاملة أي واحد .

الآن إذا كان البسط أكبر من المقام كما في المثال $\frac{33}{1}$ ثلاثة و ثلاثين على واحد فإن هذا يعني بأن هذا الكسر هو أكبر من العدد واحد - إن الكسر الذي مقامه العدد واحد يخبرني بأن هذا الشيء مؤلف من جزء واحد , أما البسط فإنه يخبرني بأن لدي عددا معينا من ذلك الشيء - إن البسط 33 مثلا يخبرني بأن لدي 33 واحدا من ذلك الشيء و ليكن بطيخة مثلا أي أن لدي 33 بطيخة و هذا يعني بأن الكسر 33 على واحد يساوي العدد 33 و أن الكسر 44 على واحد يساوي العدد 44 و الكسر 7 على واحد يساوي العدد سبعة و هكذا .

□جميع الكسور في العالم التي تتألف من بسط و مقام متماثلين هي كسور متماثلة و هي جميعها تساوي الواحد .

مثال :

$\frac{9}{9}=\frac{8}{8}=\frac{7}{7}=\frac{6}{6}=\frac{5}{5}=\frac{4}{4} = \frac{3}{3}=\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=1$ واحد

□ إن حاصل ضرب أي كسر بمقلوبه هو العدد واحد .

مثال :

20/1 ×1/20 =1

$\frac{20}{1}\times\frac{1}{20}=1$

20 على واحد ضرب واحد على 20 يساوي واحد .

تعلمون بأننا عندما نضرب كسرين ببعضهما البعض فإننا نضرب بسط الكسر الأول ببسط الكسر الثاني و نضرب مقام البسط الأول بمقام الكسر الثاني و إذا طبقنا هذه القاعدة على المثال السابق فإننا نضرب بسط الكسر الأول 20 ببسط الكسر الثاني 1 فنحصل 20 و نضرب مقام الكسر الأول 1 بمقام الكسر الثاني20 فنحصل على 20 فيصبح لدينا :

20/1 × 1/20 =20/20 = 1

عشرين على واحد ضرب واحد على عشرين يساوي عشرين على عشرين يساوي واحد .

$\frac{20}{1}\times\frac{1}{20}=\frac{20}{20}$

يساوي واحد.

$$\frac{20}{20}=1$$

اختزلنا النتيجة عشرين على عشرين فحصلنا على واحد.

مثال آخر :

10/15 × 15/10 = 150/150 =1

10 على 15 ضرب 15 على 10 يساوي 150 على 150 يساوي واحد.

$$\frac{10}{15}\times\frac{15}{10}=\frac{150}{150}=1$$

$10\times15=150$

$10\times15=150$

$$\frac{150}{150}=1$$

نتيجة ضرب أي كسر بمقلوبه هو العدد واحد.

□ مقلوب الكسر المختلط :

كيف نعثر على مقلوب الكسر المختلط؟

أولا تعلمون بأن الكسر المختلط هو كسر يتألف من عدد صحيح و كسر مثل 2/3 1 واحد و 2 على 3 أو الكسر واحد و نصف ½ 1 أو الكسر واحد و ربع ¼ 1 أو واحد و ثلاثة أرباع ¾ 1 أو اثنين و ربع ¼ 2 أو خمسة و نصف ½ 5 و هكذا.

تذكر دائما : الكسر المختلط يكون مثل أوقات الساعة : واحدو نصف , سبع و ربع , تسعة و ثلاثة أرباع و هكذا...

لكي نعثر على مقلوب رقم مختلط مؤلف من عدد صحيح و كسر فإننا نقوم بتحويل ذلك الرقم المختلط إلى كسر غير صحيح Improper Fraction .

إن كلا من الكسر المختلط - الذي يتألف من عدد صحيح و كسر- و الكسر غير الصحيح يشيران إلى قيمة أكبر من الواحد ,و هذا أمر طبيعي لأن الكسر المختلط يتألف من عدد صحيح هو على أقل تقدير العدد واحد مضافا إلى كسر و كذلك الحال بالنسبة للكسر غير الصحيح و هو الكسر الذي يكون بسطه أكبر من مقامه حيث أن هذا الكسر يشير إلى قيمة أعلى من الواحد.

يمكن استخدام كل من الكسر المختلط و الكسر غير الصحيح الذي تكون قيمته أعلى من واحد و الذي يكون بسطه أعلى من مقامه للإشارة إلى قيمة واحدة يجب أن تكون أكبر من الواحد.

□ هل يمكن استخدام الكسر المختلط المؤلف من عدد صحيح و كسر للإشارة إلى قيمة أقل من الواحد؟

□ هل يمكن استخدام الكسر غير الصحيح الذي بسطه أكبر من مقامه للإشارة إلى قيمة أقل من الواحد؟

□ هل يمكن استخدام الكسر الصحيح الذي بسطه أقل من مقامه للإشارة إلى قيمة أكبر من الواحد؟

إن لم تكن إجابتك بالنفي القاطع على الأسئلة الثلاثة السابقة فإن ذلك يعني بأنك لم تستوعب مفهوم الكسور كما ينبغي.

إن الكسر المختلط واحد و ثلاثة أرباع مثلا ¾ 1 يساوي الكسر غير الصحيح سبعة على أربعة 7/4 الذي بسطه أكبر من مقامه و الذي قيمته أكبر من الواحد .

كيف عرفنا ذلك؟

ببساطة شديدة فإننا قمنا بقسمة البسط على المقام أي أننا قمنا بقسمة أعلى الكسر أدناه :

$$\frac{7}{4}$$

$1.75 = 4 \div 7$

و بالطبع فإن 1.75 تساوي واحد على ثلاثة أرباع

¾ 1

**□ تحويل كسر غير صحيح إلى كسر مختلط:**

اقسم البسط على المقام .

سجل ناتج القسمة كعدد صحيح.

سجل باقي القسمة فوق المقام .

مثال :

ليكن لدينا الكسر غير الصحيح سبعة على أربعة 7/4 - قم بتحويل هذا الكسر إلى رقم مختلط.

نقسم البسط على المقام .

سبعة تقسيم أربعة يساوي واحد

لماذا ؟

لأن العدد سبع يحوي أربعة واحدة فقط.

- نسجل ناتج القسمة كعدد صحيح .

$7 \div 4 = 1$

إذا نضع العدد واحد قرب الكسر.

نسجل باقي القسمة وهو هنا العدد 3 كبسط للمقام 4 .

إذا فإن الكسر 7/4 يساوي الرقم المختلط واحد و ثلاثة أرباع :

7/4 = 1 ¾

$1\ \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

مثال آخر:

قم بتحويل الكسر 16/5 16 على 5 إلى رقم مختلط.

$$\frac{16}{5}$$

نقسم البسط على المقام :

$16 \div 5 = 3$

البسط 16 تقسيم المقام 5 يساوي 3 : لأن العدد 16 يحوي ثلاثة خمسات.

نسجل ناتج القسمة أي العدد 3 كعدد صحيح نضعه قرب الكسر.

نسجل باقي القسمة كبسط جديد نجعله بدلا من البسط الأصلي للكسر و باقي القسمة هنا هو العدد واحد فيصبح لدينا الرقم المختلط 3 و واحد على خمسة.

3 1/5

مثال :

حول الكسر 15 على أربعة 15/4 إلى كسر مختلط.

$$\frac{15}{4}$$

نقسم البسط 15 على المقام 4 .

15÷4=3 لأن العدد 15 يحوي أربع أربعات

نسجل ناتج القسمة أي العدد 3 كعدد صحيح نضعه قرب الكسر.

نجعل باقي القسمة وهو هنا العدد 3 كذلك كبسط جديد للكسر فنحصل على الكسر المختلط ثلاثة و ثلاثة أرباع 3 ¾ .

إذا فإن الكسر غير الصحيح 15 على أربعة 15/4 يساوي الرقم المختلط 3 و ثلاثة أرباع ¾ 3.

$3\ \frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

**باستخدام الآلة الحاسبة اقسم 15 على 4 :**

**15÷4=3.75**

**أي أن $3.75=\frac{15}{4}$**

التحليل :

إن مقام الكسر غير الصحيح السابق 15/4 يفيد بأن لدي عدة وحدات كل منها منقسم إلى أربعة أقسام .
لماذا ؟ لأن المقام أربعة 4 أصغر من البسط 15.

أما البسط 15 فإنه يشير إلى أن لدي 15 قطعة من تلك الأجزاء, فإذا كانت كل وحدة (بطيخة مثلا ) منقسمة إلى أربعة أقسام متساوية- كما يخبرني المقام- و كان لدي 15 قطعة فإن هذا يعني بأن لدي عدة وحدات أو عدة بطيخات و تحديدا فإن ها يعني بأن لدي ثلاث بطيخات كاملة و ثلاث قطع أي أن لدي ثلاث بطيخات و ثلاثة أرباع البطيخة 3 ¾.

□ هل يمكن لي أن أحول كسر صحيح proper fraction - أي كسر بسطه أقل من مقامه وقيمته أقل من واحد- إلى رقم مختلط مؤلف من عدد صحيح و كسر؟

هل يمكن لي أن أحول الكسر ثلاثة أرباع ¾ إلى رقم مختلط ؟

□ إن كنت لا تعرف إجابة هذا السؤال فإن هذا يعني بأنك لم تستوعب موضوع الكسور كما يجب.

في الحقيقة لا يمكن تحويل كسر بسطه أقل من مقامه إلى رقم مختلط . لماذا؟

**لأن قيمة هذا الكسر أقل من الواحد لأنه كما مر معنا سابقا فإن البسط عندما يكون أقل من المقام فإن ذلك يعني بأن قيمة هذا الكسر أقل من الواحد لأن كون البسط أقل من المقام يدل على أن جميع ما أمتلكه أقل من الواحد بينما الرقم المختلط يتألف من عدد صحيح واحد على الأقل و بعض الكسور.**

**□ تحويل رقم مختلط إلى كسر غير صحيح.**

فقط للتذكرة: الرقم المختلط هو رقم مؤلف من عدد صحيح و كسر مثل واحد و نصف ½ 1

أو ثلاثة و نصف ½ 3 أما الكسر غير الصحيح Improper fraction فهو كسر بسطه أكبر من مقامه .

□ خطوات تحويل رقم مختلط إلى كسر غير صحيح :

نضرب العدد الصحيح بالمقام .

نضيف ناتج عملية الضرب إلى البسط حيث نكتب نتيجة الإضافة كبسط جديد للكسر

مثال :

حول الرقم المختلط 2 و 3 على 7 2 3/7 إلى كسر غير صحيح.

$2\frac{3}{7}$

نضرب العدد الصحيح في الكسر , أي العدد 2 , بمقام الكسر أي العدد سبعة .

$2\times7=14$

نضيف ناتج عملية الضرب إلى البسط :

$14+3=17$

نكتب نتيجة عملية الجمع كبسط جديد للكسر فنحصل على الكسر 17/7 .

$$\frac{17}{7}$$

إذا فإن 2 3/7 يساوي 17/7 .

$=2\frac{3}{7}$

$$\frac{17}{7}$$

التحليل :

يفيد المقام 7 في الكسر بأن هنالك عدة وحدات ( ثمار بطيخ مثلا) كاملة و أن كلا منها ينقسم إلى سبعة أجزاء , و يفيد العدد الصحيح في الرقم المختلط $2\frac{3}{7}$ أي العدد الصحيح 2 بأن لدي وحدتين كاملتين (بطيختين كاملتين) أما البسط 3 فإنه يشير إلى أن لدي كذلك ثلاثة أجزاء من سبعة أي ثلاثة أقسام من بطيخة مقسومة إلى سبع قطع متساوية .

لنفترض بأن لدي عدة بطيخات كل منها ينقسم إلى سبعة أجزاء كما يخبرني بذلك المقام 7 فإن هذا يعني بأن الكسر $2\frac{3}{7}$ اثنين و ثلاثة على سبعة يفيد بأن لدي منها بطيختين و ثلاثة أجزاء من سبعة أي بطيختين كاملتين و ثلاثة أجزاء من بطيخة مقسومة إلى سبعة أجزاء.

المقام سبعة يفيد بأن كل وحدة أو كل بطيخة تنقسم إلى سبعة أجزاء بينما العدد الصحيح 2 يشير إلى أن لدي وحدتين كاملتين أو بطيختين كاملتين بينما يشير الكسر ثلاثة على سبعة $\frac{3}{7}$ بأن لدي كذلك ثلاثة أجزاء من السبعة أجزاء المنقسمة إليها البطيخة.

الآن , كم هو عدد الأجزاء التي لدي من تلك البطيخة ؟

بما أن كل بطيخة تنقسم إلى سبعة أجزاء ( كما يخبرني المقام 7 ) و بما أن لدي $2\frac{3}{7}$ بطيختين كاملتين و 3/7 من البطيخة فأقول أولا بأن الوحدتين الكاملتين أو البطيختين الكاملتين عبارة عن :

7+7=14

لأن لدي بطيختين كل منهما تنقسم إلى سبعة أجزاء.

ثم لدي كذلك ثلاثة أجزاء و هو ما يخبرني به البسط 3 ولذلك :

14+3=17

إذا فإن لدي 17 سبعة عشر جزءا من البطيخة أي :

$2\frac{17}{7}$ سبعة عشر على سبعة.

إذا فإن لدي 17 جزءا من عدة وحدات يتألف كل منها من سبعة اجزاء :

العدد 17 يشير إلى أن لدي وحدتين كاملتين 7+7=14

و يتبقى لدي ثلاثة أجزاء من سبعة $2\frac{3}{7}$ اثنين و ثلاثة على سبعة.

إذا فإن عملية التحويل السابقة صحيحة.

| □ تحويل كسر إلى نسبة مئوية : |
|---|

| خطوات تحويل كسر إلى نسبة مئوية : |
|---|

| اقسم البسط على المقام. |
|---|
| اضرب ناتج قسمة البسط على المقام بمئة. |

اكتب الناتج و ضع بجواره علامة النسبة المئوية % .

ليكن لدينا الكسر نصف أي واحد على اثنين ½ .

$$\frac{1}{2}$$

نقسم البسط على المقام :

واحد تقسيم 2 يساوي 0.5

$1\div2=0.5$

نضرب الناتج بمئة :

$0.5\times100=50$

نضع إشارة النسبة المئوية % بجوار ناتج الضرب فيصبح لدينا :

½ = 50%

نصف أو واحد على 2 يساوي 50%.

□ طريقة ثانية لتحويل الكسر إلى نسبة مئوية :

اضرب البسط بمئة .

اقسم الناتج على المقام .

مثال :

ليكن لدينا الكسر ثلاثة أرباع ¾ .

نضرب البسط بمئة $3\times100=300$

نقسم الناتج على 4 :

$300÷4=75$

نضع علامة النسبة المئوية بجانب النتيجة 75% .

إذا فإن ثلاثة أرباع ¾ تساوي 75% .

## □ تحويل نسبة مئوية إلى كسر:

اكتب النسبة المئوية مقسومة على مئة أي اجعل من النسبة المئوية التي تريد تحويلها إلى كسر بسطا لكسر مقامه مئة.

اقسم النسبة المئوية على مئة.

في حال لم يكن ناتج القسمة عددا صحيحا , أي في حال كانت هنالك فواصل عشرية في النتيجة فإن عليك أن تضرب كلا من البسط الذي هو النسبة المئوية و المقام الذي هو الرقم مئة بعشرة أو بمئة , حيث نضرب بعشرة إذا كان هنالك عدد واحد وراء الفاصلة العشرية , و نضرب بمئة إذا كان هنالك عددين وراء الفاصلة العشرية.

نقوم أخيرا باختزال الكسر.

مثال :

حول النسبة المئوية 30% إلى كسر .

العدد 30 هو عدد صحيح لا يحوي أي فواصل ولذلك فإننا لا نجري عليه أي عملية ضرب و إنما نكتبه كما هو على شكل كسر مقسوما على مئة:

30/100 30 على مئة $\frac{30}{100}$.

نقوم باختزال هذا الكسر : لاختزال هذا الكسر فإننا نقسم كلا من البسط و المقام على قاسم مشترك , و القاسم المشترك لدينا هو العدد عشرة.

100÷10=10

30÷10=3

إذا فإن النسبة المئوية 30% تساوي الكسر ثلاثة على عشرة $\frac{3}{10}$ 3/10

□ ملاحظة : تدعى الكسور التي مقامها العدد مئة بالكسر المئوية decimal fractions .

مثال 2 :

حول النسبة المئوية 25.5% إلى كسر .

نجعل من النسبة المئوية 25.5 بسطا لمقام مقداره مئة فنحصل على الكسر 25.5/100 .

$$\frac{25.5}{100}$$

نلاحظ بأن لدينا عدد واحد بعد الفاصلة العشرية و هو العدد 5 و لذلك فإننا نضرب كلا من البسط 25.5 و المقام الذي هو 100 بالعدد عشرة :

25.5×10=255

100×10=1000

لاحظ بأننا ضربنا بالعدد عشرة حتى نتخلص من الفاصلة العشرية لأن هنالك خانة واحدة بعد الفاصلة و لو كانت هنالك خانتين بعد الفاصلة لكان توجب علينا أن نضرب بمئة و ليس بعشرة .

□ لا تنسى أن تضرب المقام كذلك بالعدد ذاته حتى تحافظ على تناسب الكسر .

بعد عملية الضرب بعشرة نحصل على الكسر التالي 255/1000

255 على ألف .

$$\frac{255}{1000}$$

نقوم باختزال هذا الكسر وذلك بقسمة كل من البسط 255 و المقام ألف على قاسم مشترك , و هذا القاسم المشترك هو العدد خمسة : نقسم 255 على خمسة فنحصل على 51 و نقسم ألف على خمسة فنحصل على 200 و بذلك يصبح لدينا الكسر 51/200 واحد و خمسين على 200.

إذا فإن النسبة المئوية 25.5 تساوي الكسر 51/200

$\frac{51}{200}$ و إذا كان بالإمكان اختزال هذا الكسر أكثر من ذلك فعلينا أن نفعل.

□ مثال آخر:

حول النسبة المئوية 50% إلى كسر .

النسبة المئوية 50% عبارة عن عدد صحيح لا يحوي فواصل ولذلك فإننا لا نحتاج إلى ضربه بعشرة أو بمئة أو بألف حتى نتخلص من الفواصل.

نجعل النسبة المئوية 50% بسط مقامه العدد مئة فنحصل على الكسر خمسين على مئة 50/100 .

$$\frac{50}{100}$$

نختزل هذا الكسر بقسمة كل من بسطه و مقامه على خمسين 50 :

$50 \div 50 = 1$

$100 \div 50 = 2$

و بذلك نحصل على الكسر نصف أو واحد على اثنين ½

إذا فإن النسبة المئوية 50% تكافئ الكسر ½ نصف أو واحد على اثنين.

□ **طرح الكسور :**

**خطوات طرح كسرين :**

قبل القيام بجمع أو طرح كسرين من بعضهما البعض لابد لنا أولا من أن نقوم بتوحيد المقامات : أي أنه يتوجب علينا أن نجعل مقامي الكسرين متماثلين وذلك عن طريق ضرب المقام الأصغر بعدد يجعله مماثلا للمقام الأكبر .

مثال :

ما هو ناتج طرح الكسر 2/5 من الكسر 8/10 :

$8/10 - 2/5 =$

$$= \frac{2}{5} - \frac{8}{10}$$

8 على عشرة ناقص 2 على خمسة يساوي

لإجراء عملية الطرح لابد من أن نقوم بتوحيد المقامين عشرة و خمسة ليصبحا متماثلين و لذلك فإننا نضرب المقام 5 بالعدد 2 :

$2 \times 5 = 10$

2 ضرب 5 يساوي عشرة .

وبذلك نحصل على مقامين متماثلين .

□ علينا أن لا ننسى ضرب البسط 2 كذلك بالعدد ذاته الذي ضربنا به المقام أي العدد 2 وذلك حتى نحافظ على تناسب الكسر :

$2×2=4$

و بذلك يصبح لدينا الكسر أربعة على عشرة 4/10.

$$\frac{4}{10}$$

الآن نجري عملية طرح اعتيادية بين بسطي الكسرين فنكتب:

البسط الأول 8 ناقص البسط الثاني 4 يساوي 4 .

$8-4=4$

$8/10 - 4/10=4/10$

8 على عشرة ناقص أربعة على عشرة يساوي 4 على عشرة .

$$\frac{8}{10} - \frac{4}{10} = \frac{4}{10}$$

□ في عمليات الطرح و الجمع لا نمس أبدا المقامين الموحدين و لذلك فإن المقام يبقى على حاله بعد إتمام عملية الطرح أو عملية الجمع.

الآن نختزل الكسر بقسمة حديه على قاسم مشترك و هو العدد 2 :

$4÷2=2$

$10÷2=5$

فنحصل بعد الاختزال على الكسر 2/5 و هو ناتج عملية الطرح.

و بذلك نكون قد أنهينا بحث الكسور.

# □ الأرقام العشرية Decimals

تدعى الأرقام العشرية كذلك باسم الكسور العشرية Decimal fractions لأنها و كما هي حال الكسور تعبر عن جزء من كل.

إن الأرقام العشرية عبارة عن كسور لها بسط و مقام ، غير أن مقام الأرقام العشرية لا يمكن إلا أن يكون العدد عشرة أو أحد مضاعفات العدد عشرة أي مئة أو ألف أو عشرة آلاف أو مئة ألف و هكذا ، ولهذا السبب دعيت الأرقام العشرية بهذه التسمية ، فالكسر خمسة على عشرة 5/10 هو كسر بسطه العدد خمسة و مقامه العدد عشرة ، و لكي نمثل هذا الكسر على شكل رقم عشري نقول بأن الكسر خمسة على عشرة $\frac{5}{10}$ يساوي 0.5 خمسة بالعشرة أو خمسة أعشار.

تتحدد قيمة الرقم العشري وفقا لموقع الفاصلة العشرية فإذا كانت هنالك خانة واحدة بعد الفاصلة (عدد واحد) كانت قيمة هذا الرقم بالعشرات :

0.7 سبعة بالعشرة أو سبعة على عشرة $\frac{7}{10}$ 7/10 .

و إذا كانت هنالك خانتين بعد الفاصلة ( عددين اثنين) كانت قيمة هذا الرقم بالمئات:

0.07 سبعة بالمئة أو سبعة على مئة $\frac{7}{100}$ 7/100 أو سبعة بالمئة 7% .

0.99 أي 99 بالمئة أي 99% أو 99 على مئة 99/100 $\frac{99}{100}$.

و إذا كانت هنالك ثلاثة أصفار بعد الفاصلة كانت قيمة هذا الرقم بالآلاف :

0.007 سبعة بالألف أو سبعة على ألف $\frac{7}{1000}$ 7/1000

0.075 خمسة و سبعون بالألف أو خمسة و سبعون على ألف $\frac{75}{1000}$75/1000

0.220 مئتين و عشرين بالألف أو 220 على ألف $\frac{220}{1000}$220/1000

0.114 114 بالألف أو $\frac{114}{1000}$ 114/1000 .

و إذا كانت هنالك أربعة أصفار بعد الفاصلة العشرية كانت قيمة هذا الرقم عشرات الآلاف:

0.0007 سبعة بالعشرة آلاف أو سبعة على عشرة آلاف 7/10000 .$\frac{7}{1000}$

0.0077 سبعة و سبعين على عشرة آلاف أو 77 على عشرة آلاف 77/10000 $\frac{77}{10000}$

0.0777 7777 على عشرة آلاف أو 777/10000

0.7777 سبعة آلاف و سبع مئة و سبعة و سبعين على عشرة آلاف أو 7777/10000 $\frac{7777}{10000}$

إن مقام الرقم العشري هو الرقم الذي نلفظه في آخر الرقم العشري : خمسة بالعشرة تعني بأن مقام هذا الرقم هو عشرة - واحد بالألف تعني بأن مقام هذا الرقم العشري هو ألف - خمسين بالمئة تعني بأن مقام هذا الرقم العشري مئة .

## □ الفاصلة العشرية Decimal point

توضع الفاصلة العشرية أو النقطة العشرية بين الجزء و الكل - مثال £ 5.30 خمسة جنيهات و ثلاثين مليم $7.20 سبعة دولارات و عشرين سنتا .

كلما اتجهنا إلى يمين الفاصلة العشرية قلت قيمة العدد و كلما اتجهنا إلى يسار الفاصلة العشرية ازدادت قيمة العدد لأن الآحاد تتوضع إلى يمين الفاصلة العشرية .

□ كل عشرة أعشار Ten tenths تساوي واحد فإذا كان لدينا 25 عشرا و أردنا تمثيلها بشكل عشري فإننا نكتبها بهذا الشكل 2.5 اثنين و خمسة أعشار أو اثنين و خمسة بالعشرة , أي أن لديك 20 عشرا كاملة و بما أن كل عشرة أعشار تشكل واحدا كاملا فإن هذا يعني بأن لديك وحدتين كاملتين أي 2 و خمسة أعشار أي أن لدينا اثنين و خمسة على عشرة

. 2 5/10

و إذا كانت ديك ثلاثة بطيخات و قمت بقسمة كل واحدة منها إلى عشرة أقسام أي أنه صار هنالك ثلاثين قسما متساوية من البطيخ .

فإذا حصلت من تلك الثلاثين قسما من البطيخ على 25 قسما من البطيخ , أي بطيختين و نصف فهذا يعني بأنك قد حصلت على 2.5 اثنين و نصف بطيخة , أي بطيختين و خمسة على عشرة من البطيخة , و هذه القيمة تكافئ الرقم المختلط اثنين وخمسة على عشرة 2 5/10

$2\frac{5}{10}$, و المستمع يعرف بأن لديك بطيخات كل منها مقسمة إلى عشرة أجزاء متساوية و أن لديك منها 25 جزءا تشكل بطيختين و نصف البطيخة .

**الآن , إذا كان لديك عدد من ثمار البطيخ و قمت بقسمة كل بطيخة منها إلى مئة قسم متساوية بحيث أصبح كل مئة قسم من البطيخ يشكل بطيخة واحدة أو بطيخة مئوية مؤلفة من مئة قسم , ثم إنك حصلت على ثلاثمئة و سبعة أجزاء 307 أجزاء من البطيخة فإنك ستقول بأنك حصلت على 3.07 ثلاثة فاصل سبعة بالمئة من البطيخة .**

**لاحظ بأن هنالك خانتين في هذا الرقم بعد الفاصلة العشرية أي أنه رقم عشري (مئوي) .**

**إذا التبس عليك الأمر ضع صفرا مكان العدد ثلاثة فيصبح لديك الرقم 0.07 فتتبين بأنه رقم عشري (مئوي) يحوي ثلاث خانات من اليمين إلى اليسار : آحاد -عشرات- مئات.**

ولو أنك حصلت على 433 جزءا من البطيخة فإنك ستقول بأنك حصلت على 4.33 أربعة فاصل ثلاثة وثلاثين جزءا من البطيخة وهو ما يماثل الرقم المختلط أربعة و 33 على مئة $4\frac{33}{100}$

4 33/100 أي أربع بطيخات و 33 بالمئة من البطيخة .

**و بالطبع فإن الرقم 4.33 أربعة فاصل 33 بالمئة هو رقم عشري (مئوي) لأنه مؤلف من ثلاثة خانات من اليمين إلى اليسار : آحاد- عشرات -مئات.**

و سيعلم المستمع بأن لديك عدة بطيخات و أن كلا منها ينقسم إلى مئة قسم و أن كل مئة جزء من البطيخ تشكل بطيخة واحدة .

ولو أنك حصلت على 77 جزء من البطيخة فإنك ستقول بأنك قد حصلت على 0.77 أي 77 بالمئة من البطيخة ، أي 77% من البطيخة أي 77 على مئة $\frac{77}{100}$ 77/100 من البطيخة و قد ذكرت سابقا بأن الرقم العشري عبارة عن كسر مقامه رقم عشري : عشرة أو مئة أو ألف ....

أو أي من مضاعفات العدد عشرة.

الكسر 0.77 صفر فاصل 77 بالمئة هو كسر مئوي لأنه مؤلف من ثلاث خانات و هي من اليمين إلى اليسار : آحاد -عشرات-مئات.

و إذا حصلت على ست بطيخات كل واحدة منها منقسمة إلى مئة جزء و إذا حصلت كذلك على 44 جزء من البطيخة فإنك ستقول بأن لديك 6.44 ستة فاصل 44 بالمئة من البطيخة أو

6.44% من البطيخة أو ستة و 44 على مئة 6 $\frac{44}{100}$ 44/100 6 من البطيخة ، أي أنك قد حصلت على ست بطيخات و 44 بالمئة من البطيخة.

و الآن إذا قسمت كل بطيخة إلى ألف جزء و حصلت على أربع بطيخات و 350 جزءا من البطيخة فإنك ستقول بأن لديك 4.350 أي أربعة و 350 على الألف من البطيخة.

الكسر 4.350 هو كسر عشري ( ألفي) لأنه مؤلف من أربع خانات هي من اليمين إلى اليسار : آحاد-عشرات-مئات-آلاف:

0.000 في الكسر العشري (الألفي) لدينا صفر واحد قبل الفاصلة و ثلاثة أصفار بعد الفاصلة.

نعبر عن الرقم العشري 4.350 أربعة فاصل 350 بالألف بالرقم المختلط أربعة و 350 على ألف 4 350/1000 $4\frac{350}{1000}$

وهو يعني بأن لديك اربع بطيخات كاملة تنقسم كل منها إلى ألف جزء كما أن لديك كذلك 350 جزء من الألف من البطيخة.

ما أردت قوله أنه بالنسبة للأرقام العشرية فإن الشيء الذي نقوم بتمثيله بشكل عشري واحد (البطيخة ذاتها مثلا ) و لكننا مرة نقسمها إلى عشرة أجزاء و مرة نقسمها إلى مئة جزء و مرة نقسمها إلى ألف جزء و لذلك فإن الكسر العشري 1.6 واحد و ستة بالعشرة أي واحد و ستة على عشرة 1 6/10 $1\frac{6}{10}$ يكافئ الكسر المئوي 1.60 واحد و ستين بالمئة أي واحد و ستين على مئة 1 60/100 $1\frac{1}{60}$ و هو يكافئ الكسر العشري (الألفي) واحد و 600 بالألف أي واحد و 600على ألف 1 600/1000 .$1\frac{600}{1000}$

و بذلك نكون قد أنهينا بحث الأرقام العشرية .

## القوة السالبة - الأس السالب Negative exponent

**الرفع للقوة السالبة و التعبير عن الأعداد السالبة (الأقل من الواحد ) على شكل قوة سالبة :**

تعلمون بأننا نعرف القوة التي رفع إليها عدد ما عن طريق ضرب ذلك العدد بنفسه عدة مرات وفقا للقوة التي رفع إليها ذلك العدد .

ذلك يحدث عندما تكون قوة ذلك العدد موجبة , و لكننا إذا أجرينا عملية معاكسة , أي أننا إذا قمنا بقسمة ذلك العدد على نفسه عددا من المرات بدلا من ضربه عندها سنحصل على قوة سالبة نرفع إليها ذلك العدد , و بخلاف القوة الموجبة التي نعبر بها عنا لأعداد الضخمة فإننا نعبر بالقوة السالبة عن المقادير المتناهية في الصغر .

و كما تعلمون فإننا نحصل على القوة الموجبة لعدد ما عن طريق ضرب ذلك العدد بنفسه :

مثال :

خمسة مرفوعة للقوة الثانية 5^2 أي $5^2$ تساوي :

$5\times5=25$

ذلك عندما تكون قوة العدد موجبة , ولكننا إذا أجرينا عملية معاكسة , أي أننا إذا قمنا بقسمة ذلك العدد بدلا من ضربه فإننا سنحصل على قوة سالبة رفع إليها ذلك العدد .

**واحد تقسيم عشرة يساوي عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد .**

**$1\div10=10^{-1}$**

**$=1\div10=10$^−1**

$10^{-1}$

واحد تقسيم عشرة يساوي عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد.

وعلينا الانتباه إلى أن عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد تساوي واحد بالعشرة 0.1 .

لنتأكد من ذلك:

واحد تقسيم عشرة يساوي واحد بالعشرة:

1÷10=0.1

عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد تساوي واحد بالعشرة 0.1 .

---

كيف نحسب القوة السالبة باستخدام الآلة الحاسبة :

لحساب عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد :

اضغط الرقم عشرة 10 .

اضغط زر الرفع للقوة وهو إما الزر ^ أو الزر $X^Y$ .

نضغط العدد واحد : وهو يمثل القوة التي رفعنا إليها العدد عشرة .

نضغط زر تبديل الإشارة ± و ذلك لتحويل إشارة العدد إلى إشارة سالبة و بذلك تعرف الآلة الحاسبة بأن العدد واحد عدد سالب.

نضغط زر يساوي فنحصل على النتيجة أي أن عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد تساوي واحد بالعشر 0.1 .

□ عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد تعني واحد مقسوم على عشرة أي جزء على عشرة من الواحد.

نواصل التأكد من صحة ما قمنا به :

هل عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد ضرب عشرة تساوي واحد ؟

نكتب العدد عشرة في الآلة الحاسبة .

نضغط زر الرفع للقوة وهو الزر ويدج ^ أو الزر $X^Y$ .

نضغط العدد واحد لأنه يمثل القوة التي نريد رفع العدد عشرة إليها .

نضغط زر تبديل الإشارة ± لتعرف الآلة الحاسبة بأن العدد واحد عدد سالب.

نضغط إشارة الضرب ×.

نكتب العدد عشرة.

نضغط زر يساوي فنحصل على واحد - إذا فإن عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد ضرب عشرة تساوي واحد و هذا يعني بأن ما قمنا به صحيح .

10^−1×10=1

$10^{-1}\times10=1$

عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد ضرب عشرة تساوي واحد .

لقد تأكدنا من خلال العمليات السابقة أن عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد تساوي واحد بالعشرة و أن عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد ضرب عشرة تساوي واحد .

بمعنى أن عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد هي جزء بالعشرة من الواحد أي عشر .

المسألة ليست مسألة تمرين نتعلم كيف نقوم بحله و لكنها مسألة استيعاب مفهوم الرفع للقوة السالبة.

مثال ثاني عن الرفع للقوة السالبة :

| |
|---|
| ارفع العدد عشرة للقوة ناقص 2 .<br>ماذا يعني رفع العدد عشرة للقوة السالبة الثانية - 2 ناقص اثنين.<br>إذا كانت عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد تساوي واحد تقسيم عشرة , أي واحد بالعشرة 0.1 أي عشر الواحد فإن عشرة مرفوعة للقوة ناقص اثنين تساوي واحد تقسيم مئة أي واحد بالمئة 0.01 أو واحد بالمئة 1% .<br>10^-2=1%<br>عشرة مرفوعة للقوة ناقص 2 تساوي واحد بالمئة.<br>$10^{-2}=0.01$<br>لنتأكد من هذا الأمر على الآلة الحاسبة :<br>اكتب العدد عشرة على الآلة الحاسبة ذلك أن العدد عشرة هو الأساس الذي نريد رفعه لقوة معينة.<br>اضغط زر الرفع للقوة ويدج ^ أو زر الرفع للقوة $X^Y$ .<br>نضغط الزر 2 : لأننا نريد رفع العدد عشرة للقوة الثانية (العدد اثنين).<br>نضغط زر تبديل الإشارة ± لأننا نريد أن تكون القوة 2 سالبة.<br>نضغط زر المساواة = .<br>نحصل على واحد بالمئة 0.01 . |

وهذا يعني بأن العدد عشرة مرفوعا للقوة السالبة ناقص 2 يساوي واحد بالمئة 1% أو 0.01 .

لنتأكد الأن من أن عشرة مرفوعة للقوة ناقص 2 ضرب مئة تساوي واحد , أي لنتأكد من أن عشرة مرفوعة للقوة السالبة ناقص اثنين تساوي فعليا واحدا بالمئة 0.01 .

نكتب على الألة الحاسبة العدد عشرة.

نضغط زر الرفع للقوة ^ أو $X^Y$ .

نضغط العدد 2 لأننا نريد رفع العدد عشرة للقوة الثانية.

نضغط زر تبديل الإشارة ± وذلك لأننا نريد من الآلة الحاسبة أن تعلم بأن القوة 2 التي رفعنا إليها العدد عشرة هي قوة سالبة أي ناقص اثنين 2- .

نضغط زر إشارة الضرب ×.

نكتب العدد مئة 100 ثم نضغط زر يساوي= .

نحصل على النتيجة واحد .

أي أن عشرة مرفوعة للقوة السالبة ناقص 2 هي جزء من مئة جزء من الواحد أي أنها تساوي واحدا تقسيم مئة .

مثال ثالث عن الرفع للقوة السالبة :

رفع العدد عشرة للقوة ناقص 3 .

ماذا يعني رفع العدد عشرة للقوة السالبة الثانية - 3 ناقص ثلاثة .

إذا كانت عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد تساوي واحد تقسيم عشرة , أي واحد بالعشرة 0.1 أي عشر الواحد فإن عشرة مرفوعة للقوة ناقص ثلاثة تساوي واحد تقسيم ألف أي واحد بالألف 0.001 .

10^-3=0.001

عشرة مرفوعة للقوة ناقص 3 تساوي واحد بالألف.

$10^{-3}$=0.01

لنتأكد من هذا الأمر على الآلة الحاسبة :

اكتب العدد عشرة على الآلة الحاسبة ذلك أن العدد عشرة هو الأساس الذي نريد رفعه لقوة معينة.

اضغط زر الرفع للقوة ويدج ^ أو زر الرفع للقوة $X^Y$ .

نضغط الزر 3 : لأننا نريد رفع العدد عشرة للقوة الثالثة (العدد ثلاثة).

نضغط زر تبديل الإشارة ± لأننا نريد رفع العدد 3 لقوة سالبة.

نضغط زر المساواة = .

نحصل على واحد بالألف 0.001 .

و هذا يعني بأن العدد عشرة مرفوعا للقوة السالبة ناقص 3 يساوي واحد بالألف أو 0.001 .

لنتأكد الأن من أن عشرة مرفوعة للقوة ناقص 3 ضرب ألف تساوي واحد , أي لنتأكد من أن عشرة مرفوعة للقوة السالبة ناقص ثلاثة تساوي فعليا واحدا بالألف 0.001 .

نكتب على الألة الحاسبة العدد عشرة.

نضغط زر الرفع للقوة ^ أو $X^Y$ .

نضغط العدد 3 لأننا نريد رفع العدد عشرة للقوة الثالثة.

نضغط زر تبديل الإشارة ± وذلك لأننا نريد من الآلة الحاسبة أن تعلم بأن القوة 3 التي رفعنا إليها العدد عشرة هي قوة سالبة أي ناقص ثلاثة -3 .

نضغط زر إشارة الضرب ×.

نكتب العدد ألف 1000 ثم نضغط زر المساواة= .

نحصل على النتيجة واحد .

أي أن عشرة مرفوعة للقوة السالبة ناقص 3 هي جزء من ألف جزء من الواحد أي أنها تساوي واحدا تقسيم ألف .

أن واحدا تقسيم الف يساوي عشرة مرفوعة للقوة ناقص3 .

0.1 واحد بالعشرة - عشر tenth, أي عشرة مرفوعة للقوة ناقص واحد 10^-1 أو $10^{-1}$ .

0.01 Hundredthواحد بالمئة 1% أي واحد على مئة 1/100 و هي تساوي عشرة مرفوعة للقوة ناقص2 .

0.001 Thousandth واحد بالألف أي واحد على ألف 1/1000 أي عشرة مرفوعة للقوة ناقص 3 .

واحد على عشرة آلاف 0.0001 Ten thousands و هي تساوي عشرة مرفوعة للقوة ناقص 4 .

واحد على مئة ألف 0.00001 و هي تساوي عشرة مرفوعة للقوة ناقص خمسة .

□ هنالك آلات حاسبة تحوي زرا يمكننا من إجراء عمليات رفع العدد عشرة لقوة ما بشكل أسرع و هذا الزر هو :

10∧X

$10^x$

زر عشرة مرفوعة للقوة إكس .

ولاستخدام هذا الزر نتبع الخطوات التالية :

نضغط زر القوة التي نريد رفع العدد عشرة إليها – فإذا أردنا مثلا أن نرفع العدد عشرة للقوة ناقص 2 فإننا نضغط الزر 2 .

نضغط زر تبديل الإشارة ± إذا أردنا الرفع لقوة سالبة .

نضغط زر الأساس عشرة $10^x$

نحصل على النتيجة مباشرة وهي واحد بالمئة 0.01 .

# الجذر التربيعي Square root

الجذر التربيعي لعدد ما هو العدد الذي إذا ضربته بنفسه حصلت على ذلك العدد .

مثال :

العدد 3 هو الجذر التربيعي للعدد 9 لأن $3\times3=9$

3^3=9

$9=3^3$

ثلاثة مرفوعة للقوة 3 تساوي تسعة .

$\sqrt{9} = 3$

الجذر التربيعي للعدد 16 هو 4 لأن 4×4=16 .

## ☐ تحويل كسر إلى نسبة مئوية :

حول الكسر 10/20 $\frac{10}{20}$ عشرة على عشرين إلى نسبة مئوية .

نقول :

عشرة على عشرين يساوي المجهول على مئة .

10/20=X/100

$\frac{10}{20}=\frac{x}{100}$

لاكتشاف النسبة المجهولة اكس X فإننا نضرب اثنين من المعاليم بشكل تصالبي أي أننا نجري عملية الضرب على شكل حرف إكس بين بسط أحد الكسرين و مقام الكسر الثاني ثم نقسم على المعلوم الثالث , و كما تلاحظون فإن بإمكاننا أن نضرب المعلومين عشرة و مئة في الكسر السابق لأنهما يتوضعان بشكل تصالبي حيث أن العدد عشرة يمثل بسط المقام الأول بينما يشكل العدد مئة مقام الكسر الثاني و بالتالي فإننا نضرب عشرة بمئة ثم نقسم على المعلوم الثالث أي العدد عشرين .

$10\times100/20=$

عشرة ضرب مئة على عشرين يساوي ؟

$10\times100\div20=50$

$10\times100=1000$

$1000\div50=20$

إذا فإن النسبة عشرة على عشرين تساوي خمسين بالمئة .

$10/20=50\%$

$\frac{10}{20}=50\%$

رأينا سابقا كيف يمكننا استخراج النسبة المجهولة اكس X عن طريق إجراء عملية ضرب تصالبي , أي عملية ضرب على شكل حرف إكس X بين معلومين عبارة عن بسط من الكسر الأول و مقام من الكسر الثاني ثم القيام بتقسيم ناتج الضرب على المعلوم الثالث وذلك بعد صياغة المسألة على شكل كسرين مقام أحد هما العدد مئة .

# تحويل كسر إلى نسبة مئوية

حول الكسر ربع ¼ أي واحد على أربعة $\frac{1}{4}$ إلى نسبة مئوية .

دائما لحل المعادلات الكسرية التي يمكن صياغتها على شكل كسرين متساويين فإننا نضرب اثنين من المعاليم مع بعضهما البعض بشكل تصالبي ثم نجري قسمة على

المعلوم الثالث وبذلك فإننا نتمكن من استخراج مجهول المسألة .

لدينا في هذه المسألة كسرين متساويين الأول هو الكسر ربع أي واحد على أربعة ¼

أما الكسر الثاني فهو كسر مئوي و هذا الكسر بسطه مجهول و مقامه مئة و نحن نريد أن نعرف ما هو الكسر المئوي المكافئ للكسر العشري ربع او واحد على أربعة و أنت تعلمون بالطبع بأن النسبة المئوية هي عبارة عن كسر مئوي مقامه 100 .

الآن لدي ثلاثة معاليم في هذه المعادلة الكسرية و هي : واحد و ربع ¼ و مقام الكسر المئوي, أي مئة , ولدي مجهول واحد و هو بسط الكسر المئوي أي النسبة المئوية التي تكافئ الربع ¼ .

$$\frac{1}{4}=\frac{\text{مجهول?}}{100}$$

واحد / أربعة يساوي مجهول ؟/100

واحد على 4 يساوي مجهول على مئة .

نضرب المعلوم 1 بالمعلوم الثاني 100 و نقسم على المعلوم الثالث 4 :

$1\times100\div4=25$

واحد ضرب مئة تقسيم 4 يساوي 25 .

إذا واحد على أربعة يساوي 25 على مئة .

$$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$$

¼=25/100

¼=25%

# معادلة استخراج النسبة المجهولة

**لاستخراج النسبة المجهولة فإننا نقوم بتطبيق المعادلة التالية :**

**الجزء على الكل يساوي النسبة على مئة .**

$$\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}=\frac{\text{النسبة}}{100}$$

الجزء / الكل = النسبة / مئة

مثال :

بلدة في دولة أوروبية أو أمريكية يبلغ عدد سكانها الذين يمتلكون حق الانتخاب 2000 نسمة و يحتاج أي شخص فيها إلى الحصول على نصف أصوات الناخبين 50% من أصوات أبناء تلك البلدة و المقيمين فيها على الأقل حتى يصبح عمدة أو قاضيا ميدانيا أو مأمور شرطة في تلك البلدة, فكم هو عدد الأشخاص الذين يحتاج إليهم أي شخص حتى يصبح عمدة أو قاضيا أو مأمور شرطة لتلك البلدة؟

لحل هذه المسألة فإننا نطبق القاعدة السابقة :

الجزء / الكل = النسبة / مئة

$$\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}=\frac{\text{النسبة}}{100}$$

لدينا في هذه المسألة مجهول واحد وهو الجزء أي عدد الأصوات التي يتوجب على أي شخص أن يحصل عليها حتى يصبح عمدة أو مأمور شرطة أو قاض ميداني في تلك البلدة.

كم هو عدد الأشخاص الذين يحتاج أي شخص أن يقوموا بانتخابه؟

الجزء مجهول ؟

الكل : عدد السكان 2000

النسبة 50% / مئة

مجهول – الجزء = 50% النسبة
الكل 2000 100

الجزء (مجهول) تقسيم الكل (عدد سكان البلدة) يساوي النسبة وهي هنا 50% تقسيم مئة.

نجري عملية ضرب تصالبية بين المعلومين وهما الكل أي العدد الكلي لسكان البلدة و النسبة 50% فنحصل على مئة ألف.

$$2000 \times 50 = 100000$$

نقسم ناتج عملية الضرب هذا على المعلوم الثالث الذي هو مئة 100 :

$$100000 \div 100 = 1000$$

مئة ألف تقسيم مئة يساوي ألف.

إذا يحتاج أي شخص لأن يقوم ألف شخص على الأقل بانتخابه حتى يصبح عمدة أو قاضيا أو مأمور شرطة في تلك البلدة.

مسألة 2 :

ما هي نسبة 80% من ألف؟

لحل هذه المسألة نطبق القاعدة السابقة :

$$\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}} = \frac{\text{النسبة}}{100}$$

الجزء/ الكل = النسبة / مئة

في المسألة السابقة :

المجهول في هذه المسألة هو الجزء أي نسبة 80% من ألف.

الجزء (مجهول) على الكل : ألف يساوي النسبة 80% على مئة .

$$\frac{\text{الجزء مجهول}}{\text{الكل}1000} = \frac{\text{النسبة } 80\%}{100}$$

الجزء (مجهول) على الكل 1000 يساوي النسبة 80% على مئة .

و بالطبع فإننا لحل هذه المعادلة الكسرية و حل كل المعادلات الكسرية نجري عملية ضرب تصالبية على صورة حرف إكس X بين معلومين متصالبين ثم نقسم على المعلوم الثالث فنستخرج بذلك المجهول.

الف ضرب 80 يساوي 80 ألف

80 الف تقسيم 100 يساوي 800

إذا فإن نسبة 80% من ألف هي 800 .

يعني إذا كان هنالك ألف بطيخة و كنت تمتلك 800 بطيخة منها فإنك تقول بأنني أمتلك 80% من البطيخ.

تذكر دائما :

| دائما في المعادلات الكسرية التي تتألف من كسرين متساويين نضرب المعلومين بشكل تصالبي أي نضرب بسط الكسر الأول مع مقام الكسر الثاني أو نقوم بضرب مقام الكسر الأول مع بسط الكسر الثاني ثم نقسم الناتج على المعلوم الثالث فنستخرج بذلك مجهول المعادلة. |
|---|

المعلوم الثابت الدائم في هذه المعادلة هو مئة 100 .

# حساب معدلات الزيادة و النقص

مسألة :

كان عدد سكان بلدة ما 1000 نسمة ثم أصبح 1250 نسمة خلال سنة واحدة فما هو معدل زيادة عدد سكان تك البلدة؟

أولا نحسب الفرق بين العدد الحالي لعدد سكان تلك البلدة أي 1250 و بين العدد السابق لعدد السكان أي 1000 فنقول:

1250-1000=250

ثم نستخدم المعادلة الكسرية :

| **الجزء على الكل ضرب النسبة المئوية على 100** |
|---|

الجزء/ الكل ضرب النسبة المئوية / 100

الجزء = النسبة المئوية
الكل 100

و الآن لحساب معدلات الزيادة فإننا نقول:

الجزء هو مقدار زيادة عدد السكان 250

الكل يساوي عدد السكان قبل الزيادة أي ألف نسمة.

250 الجزء = ؟مجهول–النسبة المئوية
الكل 1000 100

الجزء 250 / الكل 1000 نسمة يساوي النسبة المئوية -المجهول؟ / 100

لحل هذه المعادلة الكسرية نضرب المعلومين أي الجزء 250 و العدد مئة 100 ضربا تصالبيا :

250×100=25000

ثم نقسم النتيجة على المعلوم الثالث , أي ألف فنكتب:

25000÷1000=25

إذا فإن معدل الزيادة السكانية هو 25%

# الجبر

# ما هو الاختلاف بين الرياضيات و الجبر؟

يكمن الاختلاف بين الرياضيات و الجبر في أننا في الرياضيات نتعامل مع الأعداد المعلومة بينما نتعامل في الجبر مع مزيج من الأعداد الثابتة و المجاهيل المتغيرة, و لذلك فإننا بمجرد أن نبدأ بالتعامل مع مجاهيل متغيرة فإن ذلك يعني بأننا نجري عمليات جبرية ,و ببساطة شديدة فإن الجبر هو عملية تعويض أو جبر المجاهيل المتغيرة بأعداد معلومة ثابتة.

# أساسيات الجبر و حل المعادلات الرياضية و الجبرية

□ دائما يشير مزيج المجاهيل و الأعداد مثل 4X أو 5Y مثلا إلى أن هنالك عملية ضرب بين معلوم و مجهول أي أن هنالك عملية ضرب بين عدد و حرف أو عدد و رمز:

$5y = 5.y = 5\times y$

$3X=3.X=3\times X$

□ في المعادلات الرياضية عندما نضرب المجاهيل ببعضها البعض فإننا نكتب النتيجة على شكل تغير في القوة التي نرفع إليها ذلك المجهول:

$Y.Y=Y\times Y=Y^2=Y^2$

المجهول Y مضروبا بنفسه أو مضروبا بالمجهول Y يساوي المجهول Y مرفوعا للقوة الثانية.

Y^2

$Y^2$

# جمع مجهولين

كيف نجمع عنصرين مجهولين مع بعضهما البعض؟

$Y+Y$

عندما نجمع المجهولين $Y+Y$ أو المجهولين $X+X$ أو أي مجهولين مع بعضهما البعض فإننا نقول بأنه قد أصبح لدينا $2Y$ أو $2X$ :

$Y+Y=2Y=2\times Y$

$X+X=2X=2\times X$

إن ذلك يشبه قولك 2 ضرب تفاحة يساوي 3 تفاحات .

3 ضرب بطيخةيساوي 3 بطيخات.

2× تفاحة =2 تفاحة

3 × بطيخة = 3 بطيخة أو 3 بطيخات

إن قولنا $2X$ يشبه قولنا 2 بطيخة أي 2 ضرب بطيخة .

و قولنا $3Y$ يشبه قولنا 3 تفاحة أي 3 ضرب تفاحة .

غير أنه يتوجب علينا الانتباه إلى أنه ليس بإمكاننا أن نفعل الأمر ذاته عندما نجمع مجهولين مختلفين مع بعضهما البعض إذ لا يمكنك أن تقول :

$Y+x=2yx$

و إلا فإن هذا يعني بأن لديك $2y$ و $2x$ أي أن هنالك :

$2yx+2yx$

إن الأمر يشبه قولك : بطيخة زائد تفاحة يساوي

2بطيخة و 2 تفاحة أو قولك بطيخة+تفاحة = 2بطيخة تفاحة أي

2 × بطيخة و 2× تفاحة و هو قول غير صحيح لأنه يعني بأن لديك بطيختين و تفاحتين.

إننا ندعو المجاهيل المختلفة عن بعضها البعض و التي لا يمكن القيام بجمعها مع بعضها البعض بالأطراف أو الحدود غير المتماثلة unlike terms .

**إذا لا يمكنك أن تجمع المجاهيل أو المتغيرات غير المتماثلة مع بعضها البعض.**

**□ و كذلك لا يمكنك أن تجمع المجاهيل نصف المتماثلة مع بعضها البعض :**

**لا يمكنك أن تجمع المجهول Y مع المجهول YX .**

في الجبر تشير الأعداد إلى الكم بينما تشير المجاهيل إلى النوع و لذلك فإن القول بأن تعبيرين جبريين هما تعبيرين متماثلين أو متشابهين يرتبط بمدى تشابه و تماثل المجاهيل فيهما و ليس بمدى تشابه الأعداد المعلومة , ولذلك فإننا نقول عن تعابير مثل $2Y^8$ و $5Y^8$ بأنها تعابير متماثلة لأنها تحوي المتغير المجهول Y ذاته , كما أنها مرفوعة للقوة ذاتها أي أنها مرفوعة للقوة الثامنة.

أما العددين 2 و 5 فهما مجرد تعابير كمية تخبرنا كم لدينا من هذا ال y بغض النظر عن ما هيته.

إذا :

لا يمكنك أن تقوم بجمع مجهولين غير متماثلين مع بعضهما البعض فتقول:

~~$Y+X=2YX$~~

لأن هذا سيعني بأن :

~~$Y+X=2(Y+X)$~~

و هذا يعني بأن لديك $2Y$ و $2X$ و هو قول غير صحيح لأنه يعني بأن لديك أربع عناصر فكيف يمكن أن نجمع عنصرين مع بعضهما البعض و تكون نتيجة الجمع أربعة عناصر ؟

~~$2(Y+X)= 2\times Y+2\times X=2Y+2X$~~

□ تذكرة :

عندما نضع عددا بجانب قوس فإن ذلك يعني بأننا نضرب ذلك العدد بمحتويات القوس.

يمكننا في الجبر أن نجمع مقادير متماثلة نوعيا غير أنها مختلفة كميا :

$6Y+3Y=9Y$

$5X+10X=15X$

إن الأمر يشبه قولك :

6 سيارات زائد 3 سيارات يساوي 9 سيارات .

5 دجاجات زائد 10 دجاجات يساوي 15 دجاجة.

غير أنه ليس بمقدورنا أن نجمع مقادير مختلفة من حيث النوع مع بعضها البعض , أي أنه لا يمكننا أن نجمع تعابير تختلف من حيث مجاهيلها عن بعضها البعض مثل Y و X .

إن الأمر يشبه قيامنا بجمع 12 تفاحة مع 13 دجاجة أو جمع 5 سيارات مع 6 سمكات.

إن الأمر يشبه عمليات جمع و طرح الكسور التي مرت معنا سابقا إذ لا يمكنك أن تجمع أو أن تطرح كسرين من بعضهما البعض ما لم تقم بتوحيد مقاماتهما – لا يمكنك أن تجمع أو أن تطرح كسرين ذوي مقامين مختلفين و كذلك ليس بإمكانك أن تجمع أو أن تطرح تعبيرين جبريين يحويان مجهولين أو متغيرين مختلفين.

---

□ لا يمكن جمع مجاهيل تختلف مع بعضها البعض من حيث القوة المرفوعة إليها :

~~Y^3+Y^6~~

~~$Y^3+Y^6$~~

---

□ عند طرح تعبيرين جبريين من بعضهما البعض نقوم فقط بطرح الأعداد من بعضها دون أن نمس المجاهيل :

$9y-3y=6y$

$7x-2x=5x$

---

و كما هي الحال في الرياضيات الاعتيادية فإننا عندما نقوم بحل معادلة جبرية ما فإننا نقوم بإجراء المعادلات الرياضية وفق الأولوية التي ذكرتها سابقا فنبدأ بإجراء العمليات المحصورة بين قوسين و نعطي الأولوية للعمليات المحصورة بين الأقواس الصغرى الموجودة ضمن أقواس كبرى .

ثم تعطى الأولوية للعمليات المحصورة بين الأقواس الكبرى ثم نقوم بتفكيك الرفع للقوة ثم نجري بعد

**ذلك عمليتي الضرب و القسمة ثم عمليتي الجمع و الطرح.**

مثال :

لتكن لدينا المعادلة التالية:

$6Y(4Y+2Y)$

لحل هذه المعادلة فإننا نبدأ أولا بإجراء العمليات المحصورة بين قوسين :

$(4Y+2Y)$ فنحصل على :

$4Y+2Y=6Y$

فتصبح المعادلة على الشكل التالي :

$6Y(6Y)$

بعد أن أجرينا العمليات المحصورة بين القوسين نقوم بتفكيك الرفع للقوة و بما أنه لا يوجد رفع للقوة في هذه العملية فإننا ننتقل لإجراء عملية الضرب فنقول :

$6Y(6Y)=$

$6y\times 6y$

$6\times 6\times Y\times Y=36Y\^2$

$36Y^2$

ضربنا العدد 6 بنفسه فحصلنا على 36 و ضربنا المجهول Y بنفسه فحصلنا على المجهول Y مرفوعا للقوة الثانية.

□ عندما نقوم بضرب قوى لها الأساس ذاته فإننا نبقي على الأساس الموحد كما هو دون تغيير ثم نقوم بجمع تلك القوى مع بعضها البعض.

مثال :

ما هو حاصل ضرب :

Y^4×Y^3=

$Y^4 \times Y^3 =$

ما هو حاصل ضرب المتغير Y المرفوع للقوة الرابعة مع المتغير Y المرفوع للقوة الثالثة؟

نقول بأن حاصل ضرب هذين المتغيرين هو Y^7 أي $Y^7$ أي Y مرفوع للقوة السابعة.

□ تذكر دائما :

عندما نقوم بضرب متغيرين متماثلين مرفوعين لقوتين فإننا نبقي ذلك المتغير كما هو بينما نقوم بجمع القوتين أو الأسين مع بعضهما البعض.

□ عندما نقوم بضرب متغيرين مع بعضهما البعض أحدهما مرفوع لقوة ما و الآخر غير مرفوع لأية قوة فإننا نفترض دائما بأنه مرفوع للقوة الأولى, أي أنه مرفوع للقوة واحد و نجري عملية الضرب على هذا الأساس.

Y=Y^1 Y=Y^1

مثال :

ما هو حاصل ضرب المتغير Y الغير مرفوع لأية قوة Y مع المتغير Y المرفوع للقوة الرابعة ؟

Y×Y^4=?

$Y \times Y^4 = ?$

لحل عملية الضرب هذه فإننا نفترض دائما بأن المتغير الغير مرفوع لأية قوة هو في الحقيقة مرفوع للقوة الأولى أي أنه مرفوع للقوة واحد و نجري عملية الضرب على هذا الأساس.

Y×Y^4=Y^1×Y4

$Y \times Y^4 = Y^1 \times Y^4$

Y ضرب Y مرفوع للقوة الرابعة يساوي Y مرفوعا للقوة الأولى ضرب Y مرفوعا للقوة الرابعة.

إذا فقد افترضنا بأن المتغير Y الغير مرفوع لأية قوة هو مرفوع للقوة الأولى أي أنه مرفوع للقوة واحد.

الآن , كيف نجري عملية الضرب بين متغير مرفوع لقوة ما و متغير مماثل مرفوع للقوة الأولى؟

كما رأينا في القاعدة السابقة فإننا عندما نضرب متغيرات مرفوعة لقوى مختلفة فإننا نقوم ببساطة بجمع هذه القوى مع بعضها البعض دون أن نمس المتغيرات و لذلك فإننا نقول:

Y×Y^4=Y^1×Y4=Y^5

$Y \times Y^4 = Y^1 \times Y^4 = Y^5$

4+1=5

Y ضرب Y مرفوع للقوة الرابعة يساوي Y مرفوعا للقوة الأولى ضرب Y مرفوعا للقوة الرابعة يساوي حاصل جمع تلك القوتين أي أنه يساوي Y مرفوعا للقوة الخامسة.

# تقسيم مجهولين متغيرين متماثلين مرفوعين لقوة ما

عند تقسيم مجهولين متغيرين متماثلين فإننا نبقي الأساس دون تغيير و نطرح القوى من بعضها البعض.

ما هو حاصل قسمة المتغير المجهول $Y^6$ المرفوع للقوة السادسة على المتغير $Y^4$ المرفوع للقوة الرابعة ؟

Y^6÷Y^4=

$Y^6 \div Y^4 = ?$

**عند تقسيم متغيرين مجهولين متماثلين مرفوعين لقوة ما فإننا نبقي الأساس Y كما هو و نقوم بطرح إحدى القوة التي رفع لها ذلك الأساس من القوة الأخرى**

فنكتب :

$6-4=2$

و عليه يكون حل المسألة على الشكل التالي:

Y^6÷Y^4=Y^2

$Y^6 \div Y^4 = Y^2$

إذا فإن حاصل قسمة المتغير المجهول Y المرفوع للقوة السادسة على المتغير المجهول المماثل Y المرفوع للقوة الرابعة هي المتغير Y ذاته مرفوعا للقوة الثانية $Y^2$ .

□ **تذكر دائما :**

**إن عملية ضرب متغيرين متماثلين مرفوعين لقوة ما ليست إلا عملية جمع لقوتيهما .**

$Y^2+Y^3=Y^5$

إن عملية قسمة متغيرين متماثلين مرفوعين لقوة ما ليست إلا عملية طرح لقوتيهما من بعضهما البعض.

$Y^4÷Y^2=y^2$

عند ضرب متغيرين متماثلين أحد هما مرفوع لقوة ما و الثاني غير مرفوع لأي قوة فإننا نعتبر المتغير غير المرفوع لأية قوة بأنه مرفوع للقوة الأولى ثم نقوم بضرب هذين المتغيرين من خلال القيام بجمع قوتيهما مع بعضهما البعض.

$Y×Y^7=Y^1×Y^7=Y^8$

□ أي متغير مرفوع للقوة صفر فإنه يساوي واحد :

Y^0=Y^1

$Y^0=Y^1$

المتغير Y المرفوع للقوة صفر يساوي واحد .

□ أي عدد نرفعه للقوة صفر فإنه يساوي الواحد :
تأكد من هذا الأمر باستخدام الآلة الحاسبة :

ادخل أي رقم يخطر لك إلى الآلة الحاسبة .

اضغط زر الرفع للقوة : إما الزر ^ أو الزر $X^Y$

اضغط الزر صفر .

اضغط زر التساوي =

□ رفع القوة للقوة :

إذا كان لدينا متغير ما مرفوع لقوة ما و كان هذا المتغير موجود ضمن قوسين و كان القوس مرفوع لقوة أخرى فإن هذا يعني بأنه يتوجب علي أن أضرب كلتا القوتين ببعضهما البعض .

مثال :

$(Y^5)^4$

لدينا المتغير Y المرفوع للقوة الخامسة وهو موجود ضمن قوس مرفوع للقوة الرابعة , وهذا يعني بأن علي أن أضرب كلتا القوتين ببعضهما البعض :

Y المرفوع للقوة الخامسة موجود ضمن قوس مرفوع للقوة الرابعة و هذا يعني بأنه يتوجب علي أن أضرب القوتين ببعضهما البعض ضربا حقيقيا (و ليس عملية جمع ) فأقول :

$4\times5=20$

$(Y^5)^4=y^{20}$

$(Y^5)^4=y$^20

لاحظ كيف ضربنا القوة التي رفع إليها المتغير Y أي القوة الخامسة بالقوة التي رفعنا إليها القوس وهي القوة الرابعة فتكون النتيجة المتغير ذاته مرفوعا للقوة 20 .

□ عندما نرفع قوسا لقوة ما فإن جميع العناصر الموجودة ضمن ذلك القوس ترفع لتلك القوة .

مثال :

$(Ya)^4=Ya\times Ya\times Ya\times Ya$

نلاحظ بأن المتغيرين Ya الموجودين ضمن قوس مرفوع للقوة الرابعة هما كذلك مرفوعين للقوة الرابعة .

□ إن المعلومات السابقة تمتلك أهمية كبيرة في تفكيك و تبسيط المعادلات الجبرية.

| □ يمكنك أن تضرب ثابتا معلوما , أي عدد معروف, بمتغير مجهول. |
|---|

مثال :

$2Y = 2.Y=2\times Y$

لاحظ في المثال السابق كيف ضربنا المتغير المجهول Y بالعدد 2 .

□ دوما عندما نجد رقما يسبق متغيرا ما فإن هذا يعني بأن هنالك علاقة ضرب بينهما :

$3Y=3\times Y$

$7X=7\times X$

$5A=5\times A$

$11\ C=11\times C$

□ عندما نجد عددا ما قبل قوس فهذا يعني بأن هذا العدد مضروب بمحتويات ذلك القوس:

$3(1+7) = 3\times(1+7)$

العدد ثلاثة الموجود قبل القوس يعني بأن هذا العدد مضروب بمحتويات هذا القوس.

□ يمكنك أن تضرب عدد ثابت معلوم بناتج ضرب عدد ثابت معلوم مع ناتج ضرب عدد ثابت معلوم مع متغير مجهول:

مثال :

$3\times7Y=21Y$

في المثال السابق ضربنا العدد الثابت 3 بناتج ضرب العدد 7 مع المتغير Y فكانت النتيجة 21Y .

$3\times5X=15X$

ضربنا العدد الثابت 3 بنتيجة ضرب العدد 5 مع المتغير X وحصلنا على النتيجة 15X .

عندما نقول مثلا 5X أو Y3 فإننا ببساطة نقصد بأن هنالك ثلاثة من هذا ال X أو هذا ال Y فإذا كان X هذا بطيخة مثلا فإنني أريد القول بأن هنالك ثلاث بطيخات و إذا كان X حبة بطاطس فإنني أقصد قولي 5X خمس حبات بطاطس .

الآن عندما نقول مثلا :

$3\times7Y=21Y$

فإذا كان Y بطيخة مثلا فإن 7Y تعني لدي سبع بطيخات (سبعة بطيخة ) و عندما أقول $3\times7Y$

فإنني ببساطة أعني القول بأن هنالك 21 بطيخة مثلا .

3 ضرب 7 بطيخةيساوي 21 بطيخة .

□ يمكنك أن تضرب متغيرا مجهولا بمتغير مجهول آخر:

Y × Y=Y^2

$Y\times Y=Y^2$

**مجهول غير مرفوع غير مجهول ضرب قوة لأية مرفوع غير مجهول مرفوع لأية قوة يساوي مجهول مرفوع للقوة الثانية.**

**و هذا يماثل قولنا :**

**$5\times5=5$^2**

**$5\times5=5^2$**

**أي عدد عندما نضربه بنفسه فإن النتيجة تكون العدد ذاته مرفوعا للقوة الثانية - الرفع للقوة الثانية يعني بأن العدد أو الشيء مضروب بنفسه.**

□ يمكنك أن تضرب مجهولا مرفوعا لقوة ما بمجهول مرفوع كذلك للقوة:

Y^2.Y^4=Y^6

$Y^2\times Y^4=Y^6$

6=4+2

المجهول Y المرفوع للقوة الثانية ضرب المجهول Y المرفوع للقوة السادسة يساوي المجهول Y مرفوعا للقوة السادسة.

Y^7.Y^2=Y^9

$Y^7\times Y^2=Y^9$

9=2+7

المجهول Y المرفوع للقوة السابعة ضرب المجهول Y المرفوع للقوة الثانية يساوي المجهول Y مرفوعا للقوة التاسعة.

Y^3.Y^5=Y^8

$Y^3 \times Y^5 = Y^8$

$3+5=8$

المجهول Y المرفوع للقوة الثالثة ضرب المجهول Y المرفوع للقوة الخامسة يساوي المجهول Y مرفوعا للقوة الثامنة.

| |
|---|
| □ تذكر دائما بأننا عندما نضرب قوتين مع بعضهما البعض فإننا ببساطة نقوم بجمعهما سويا, أي أن عملية ضرب القوى في هذه الحالة هي عملية جمع. |

□ و لكن انتبه جيدا إلى أن محصلة قوى مجهول ما مرفوع لقوة ما موجود ضمن قوس مرفوع لقوة كذلك هو جداء أو حاصل ضرب هاتين القوتين مع بعضهما البعض و ليس حاصل جمعهما سويا :

| |
|---|
| (X^5) ^5=X^25<br>$(X^5)^5=X^{25}$<br>$5 \times 5=25$<br><br>محصلة جداء قوى المجهول X المرفوع للقوة الخامسة و الموجود ضمن قوس مرفوع للقوة الخامسة تساوي جداء أو حاصل ضرب القوة التي رفع إليها ذلك المجهول بالقوة التي تم رفع القوس إليها أي :<br>$5 \times 5=25$<br>و ليس حاصل جمع هاتين القوتين مع بعضهما البعض. |

| |
|---|
| □ يمكنك أن تضرب ثابتا معلوما, وليكن مثلا العدد 9 بمتغير مجهول و ليكن مثلا Y : |

9.Y=9Y

9×Y=9Y

قمنا بضرب الثابت المعلوم 9 بالمتغير المجهول Y و كانت النتيجة 9Y أي تسعة أشياء من هذا ال Y أيا يكن .

□ يمكنك أن تضرب معلوما ثابتا و ليكن مثلا العدد 8 بمتغير مجهول مرفوع لقوة ما و ليكن مثلا $Y^3$ :

8.Y^3=8Y^3

$8×Y^3=8Y^3$

المعلوم الثابت 8 مضروبا في المجهول Y المرفوع للقوة الثالثة يساوي 8Y مرفوعا للقوة الثالثة.

لاحظ بأننا عندما نضرب عددا ما بمجهول مرفوع إلى قوة معينة فإننا نضاعف ذلك المجهول بحسب العدد الذي ضربناه به دون أن يطرأ أي تغيير على القوة التي رفعنا إليها ذلك المجهول.

□ عندما نضرب مجهولا ما مرفوعا لقوة ما بعدد ما فإنه لا يطرأ أي تغيير على القوة التي رفعنا إليها ذلك المجهول.

□ عندما نضرب مجهولا ما مرفوعا لقوة ما بأي عدد فإن القوة التي قمنا برفع ذلك المجهول إليها لا تتأثر أبدا بعملية الضرب و تبقى كما هي.

4.Y^3=4Y^3

$4 \times Y^3 = 4Y^3$

عندما قمنا بضرب المجهول Y المرفوع للقوة الثالثة بالعدد 4 لم تتأثر القوة التي رفعنا إليها المجهول Y بعملية الضرب و بقيت ثلاثة كما كانت قبل إجراء عملية الضرب بينما تضاعف المجهول Y أربع مرات ليصبح 4Y .

□ يمكنك أن تضرب متغيرا مجهولا بحاصل ضرب ثابت معلوم مع متغير مجهول:

$Y.6X=Y6X$

$Y \times 6X = Y6X$

قمنا بضرب المتغير المجهول y بحاصل ضرب العدد 6 مع المتغير المجهول X فكانت النتيجة Y6X .

□ يمكنك أن تضرب متغيرا مجهولا مرفوعا لقوة ما بنتيجة ضرب قوة متغير مجهول مع قوة ثابت معلوم:

$Y^3.7Y^4=7Y^7$

Y^3×7Y^4=7Y^7

المتغير المجهول Y المرفوع للقوة الثالثة ضرب حصيلة ضرب الثابت المعلوم 7 و المتغير المجهول Y المرفوعين للقوة الرابعة يساوي 7Y مرفوعة للقوة السابعة .

□ تذكر دائما بأن نتيجة ضرب قوتين هي مجموع هاتين القوتين :

$Y^3.7Y^4=Y^7$

$3+4=7$

$Y^3.Y^6=Y^9$

$Y^3 \times Y^6 = Y^9$

$9=6+3$

القوة السادسة ضرب القوة الثالثة يساوي القوة السادسة زائد القوة الثالثة = القوة التاسعة

□ يمكنك أن تضرب نتيجة ضرب ثابت معلوم بمتغير مجهول مع نتيجة ضرب ثابت معلوم بمتغير مجهول.

$5Y.3Y=15Y$

$5Y \times 3Y=15Y$

في المثال السابق قمنا بضرب نتيجة ضرب مجهول هو Y و معلوم هو العدد 5 بنتيجة ضرب معلوم هو العدد 3 مع مجهول هو Y .

و بالطبع فإننا عندما نقول مثلا 5Y فإننا نقصد 5×Y و عندما نقول 3Y فإننا نقصد القول 3×Y .

$5Y \times 3Y=15Y$

$5 \times Y \times 3Y=15Y$

□ يمكننا أن نضرب معلوم و مجهول مضروبين ببعضهما البعض , و المجهول مرفوع لقوة معينة بحاصل ضرب معلوم و مجهول آخرين و المجهول فيهما مرفوع لقوة:

$7Y^5.3Y^3=21Y^8$

$7Y^5 \times 3Y^3=21Y^8$

لاحظ بأن المجهول Y مضروب بالعدد 7 كما أنه مرفوع للقوة الخامسة و قد قمنا بضرب كل ذلك بالمجهول Y المضروب بالعدد 3 و المرفوع للقوة الثالثة و لذلك

فقد أجرينا عملية ضرب اعتيادية بين العددين 7 و 3 :

$7\times3=21$

و كانت نتيجة عملية الضرب هي 21 .

ثم قمنا بضرب القوتين الخامسة و الثالثة التي رفع إليهما المجهولين Y و Y الثانية و انتبه كيف أننا أنجزنا عملية ضرب هاتين القوتين عن طريق جمعهما مع بعضهما البعض :

$5+3=8$

و كانت نتيجة جمع هاتين القوتين العدد 8 .

□إن حاصل ضرب قوتين هو مجموع تلك القوتين : غير أن هذا الكلام لا ينطبق عندما يكون المجهول ذاته مرفوعا إلى قوة معينة و موجودا ضمن قوس مرفوع لقوة أخرى عندها نجري عملية ضرب اعتيادية :

مثال :

(y^3)^5=y^15

$(y^3)^5=y^{15}$

لدينا مجهول واحد هو المجهول y و هو مرفوع للقوة الثالثة و هو موجود ضمن قوس مرفوع بدوره للقوة الخامسة , سيكون من الخطأ أن نقول بأن نتيجة ضرب هاتين القوتين هو مجموعهما و الصحيح أن نجري عملية ضرب اعتيادية بين هاتين القوتين :

$5\times3=15$

فنقول بأن ناتج ضرب هاتين القوتين هي 15 .

## إجراء عملية القسمة على المتغيرات variables

□ يمكننا أن نضرب بأي عدد و لكن ليس بإمكاننا أن نقسم على أي عدد فلا يمكننا مثلا أن نقسم على الصفر , و لهذا السبب عندما تقسم على متغير (مجهول) أو عندما تضع متغيرا مجهولا كمقام لكسر ما فإن عليك دائما أن تضع شرطا تخلي به مسئوليتك و هو أن ذلك المتحول لا يساوي الصفر.

$X \neq 0$

المتغير المجهول X أو سين أو سمه ما شئت لا يساوي الصفر.

## □ متعددات الحدود Polynomials

متعددات الحدود هي مزيج من الأعداد و المجاهيل المرفوعة لقوى معينة :

امثلة على متعددات الحدود :

$5Y^3$, $2Y^4$ ....

يمكن تمثيل الأعداد الثابتة على شكل متعددات حدود فالعدد 9 مثلا يساوي 5 مضروبة في مجهول مرفوع للقوة صفر :

9×Y^0

$9 \times Y^0$

إذا ضربنا أي عدد بمجهول مرفوع للقوة صفر فإن الناتج سيكون ذلك العدد نفسه.

9×Y^0=9

$9 \times Y^0 = 9$

□ جرب باستخدام الآلة الحاسبة أن تضرب أي عدد بعدد آخر مرفوع للقوة صفر :

اضغط الزر الذي يمثل أي عدد ترغب به .

اضغط زر إشارة الضرب : × أو نجمة * .

اكتب أي عدد أو رقم مهما كان كبيرا.

اضغط زر الرفع للقوة أي الزر ^ أو الزر $X^Y$ .

اضغط الزر صفر .

اضغط زر التساوي = .

□ إذا ضربت أي عدد بأي عدد مرفوع للقوة صفر فإن الناتج يكون العدد الأول ذاته.

13×700^0=13

$13 \times 700^0 = 13$

13 ضرب 700 مرفوعة للقوة صفر تساوي 13 .

فإذا طلب منك أن تكتب أي عدد على شكل أحد متعددات الحدود فما عليك إذا إلا أن تكتبه مضروبا بأي مجهول و ليكن X مثلا مرفوعا للقوة صفر.

أنماط متعددات الحدود POLYNOMIALS :

ثنائيات الحدود المتعددة وهي التي تتألف من متعددتي حدود أي من مجموعتين تتألف كل مجموعة بدورها من أعداد و مجاهيل :

6Y^5+4Y

$6Y^5+4Y$

Two nomial-binomial

ثلاثيات الحدود المتعددة : مثال Y^2+3^Y+7Y

$Y^2+3y+7y$

Three monomials-Trinomials

□ تذكر دائما :

تدعى الحدود بأنها حدود متشابهة إذا كانت تتألف من المتغيرات ذاتها و إذا كانت مرفوعة للقوة ذاتها .

مثال على الحدود المتماثلة :

2x,5x,7x

$4y^5,3y^5,2y^5$

**إذا كانت المجاهيل غير متماثلة أو إذا كانت مرفوعة لقوى مختلفة فإن هذا يعني بأن تلك الحدود غير متماثلة .**

أمثلة على الحدود غير المتماثلة :

4y,4X : الاختلاف في المجاهيل X,Y : حدود غير متماثلة .

5Y^6,3Y^9

$5Y^6$ , $3y^9$ : حدود غير متماثلة لأنها مرفوعة لقوى متباينة - الطرف الأول مرفوع للقوة السادسة بينما الطرف الثاني مرفوع للقوة التاسعة .

**تذكر دائما :**

**لا يمكن القيام بجمع الحدود التي تحوي مجاهيل أو متغيرات مختلفة - يمكن القيام فقط بجمع الأطراف المتماثلة , و الأطراف المتماثلة هي تلك التي تحوي المجاهيل أو المتغيرات ذاتها و التي تكون مرفوعة للقوة ذاتها .**

## المعادلات الجبرية - مبادئ حل المعادلات

## المعادلات Equation

تطلق كلمة معادلة على الجملة الرياضية التي تحتوي على مجهول واحد على الأقل .

يتمثل الهدف من حل المعادلة في معرفة قيمة ذلك المجهول .

إن الاستراتيجية الأكثر استخداما في حل المعادلات الرياضية تتمثل في تفكيك كافة العمليات الرياضية الموجودة داخل المعادلة و تفكيك العناصر المكونة للمعادلة بحيث نتمكن من عزل المجهول و وضعه في أحد طرفي المعادلة .

فإذا كانت لدي المعادلة التالية :

5Y+3=18

فإن علي أن أعرف بأن أحدا ما قد ضرب المجهول Y بالعدد 5 ثم أضاف له العدد 3 , وهنا تتمثل مهمتي في أن أقوم بتفكيك تلك العمليات الرياضية حتى أتمكن من معرفة القيمة الفعلية للمجهول Y وهي هنا تساوي3 .

**إن حل المعادلات الرياضية يتضمن القيام بعكس عملياتها : عملية الضرب هي العملية المعاكسة لعملية القسمة و عملية الجمع هي العملية المعاكسة لعملية الطرح.**

Y+90=100

تفيد المعادلة السابقة بأنني أضفت Y إلى 90 فحصت على 100 , ولاكتشاف قيمة المتغير Y فإننا نقوم بإجراء عملية معاكسة لعملية الجمع, أي أننا نجري عملية طرح فنقول:

100-90=10

إذا فإن قيمة المجهول Y تساوي 10 .

مثال آخر :

X-300=200

لاكتشاف قيمة المجهول X فإننا نقوم بعملية معاكسة لعملية الطرح أي أننا نجري عملية جمع فنقول:

200+300=500

إذا فإن المجهول X يساوي 500.

$3Y=300$

تقول هذه المعادلة بأن العدد 3 مضروبا في المجهول Y يساوي 300 .

لاكتشاف قيمة المجهول Y يتوجب علينا إجراء عملية معاكسة لعملية ضرب المجهول Y في العدد 3 و لذلك فإننا نقوم بقسمة الناتج 300 على 3 حتى نحصل على قيمة المجهولY فنقول:

$300\div3=100$

إذا فإن قيمة المجهول Y هي 100.

□ بالطبع فإننا عندما نجد عددا بجوار متغير مجهول دون وجود أي إشارة فإن ذلك يعني بأن ذلك العدد مضروب بذلك المجهول:

$3Y=3.Y=3\times Y$

9X تعني بأن العدد تسعة مضروبا بالمجهول إكس.

4Y تعني بأن العدد 4 مضروبا في المجهولY

و إذا رأينا عددا ما أو مجهولا متغيرا بجانب قوس فإن ذلك يعني بأن ذلك العدد أو ذلك المجهول مضروب بمحتويات ذلك القوس .

$4(\quad)=4\times(\quad)$

$Y(\quad)=Y\times(\quad)$

لدينا المعادلة التالية :

$Y/5=25$

$\frac{Y}{5}=25$

$Y \div 5=25$

Y على 5 يساوي 25 أو Y تقسيم 5 يساوي 25 .

لحل هذه المعادلة فإننا نجري عملية معاكسة لعملية القسمة أي أننا نجري عملية ضرب فنقول:

$5.25=Y$

$5\times25=Y$

و بالطبع فإن :

$5\times25=125$

و هذا يعني بأن :

$Y=125$

---

حل المعادلة التالية:

$3Y-5=22$

تحوي هذه المعادلة على عمليتين اثنتين الأولى هي عملية ضرب 3y وتعني $3\times y$ أما العملية الثانية فهي عملية طرح وهي عملية طرح العدد 5 .

نبدأ بحل هذه المعادلة من خلال حل آخر عملية تمت فيها وهي عملية الطرح ( ناقص5 ) حيث نقوم بعكس عملية الطرح و تحويلها إلى عملية جمع :

$22+5=27$

و بذلك نكون قد بسطنا المعادلة وذلك عن طريق ضم العددين 22 و خمسة إلى بعضهما البعض و تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$3y=27$

ما هو العدد الذي إذا ضربته بالعدد ثلاثة كان الناتج 27 ؟

لمعرفة ذلك فإننا نعكس عملية الضرب محولين إياها إلى عملية قسمة فنقول:

$27÷3=9$

إذا فإن المجهول y يساوي 9 .

نتأكد من صحة الإجابة وذلك بإبدال المجهول y بالعدد 9:

$3Y-5=22$

$3y=3×9=27$

$27-5=22$

إذا فإن الحل صحيح.

---

□ إن حل المعادلات يستدعي إجراء عمليات معاكسة للعمليات التي تم إجراؤها في المعادلة وذلك للتوصل لقيمة مجهول المعادلة .

□ إن حل المعادلات يستدعي إجراء العمليات الرياضية في المعادلات بشكل معاكس للترتيب الذي وردت به تلك العمليات في المعادلة :

ابدأ أولا بإجراء آخر العمليات الرياضية ورودا.

**إن حل المعادلات الرياضية يشبه فك و تركيب أية جهاز حيث أن آخر قطعة نقوم بتركيبها هي أول قطعة نبدأ بتركيبها .**

□ لحل أية معادلة يتوجب علينا أولا أن نعرف الترتيب الذي جرت في العمليات الرياضية ثم أن نقوم بتفكيك تلك العمليات الرياضية بشكل معاكس, فإذا رأيت في معادلة ما بأن مجهولا ما قد تمت إضافة العدد 5 إليه ثم تمت قسمته على ثلاثة فإن عليك أن تبدأ بضرب هذا المجهول بالعدد ثلاثة ومن ثم فإن عليك أن تطرح منه العدد خمسة .

إذا فإننا عندما نقوم بحل المعادلات فإننا لا نعكس العمليات و حسب و إنما فإننا كذلك نعكس ترتيب العمليات بادئين بآخر عملية قمنا بها و متجهين نحو أول عملية قمنا بها أو أجريناها على المجهول:

$$3Y+10=25$$

إن المعادلة السابقة تخبرنا بأنه قد تم ضرب المتغير المجهول Y بالعدد ثلاثة ومن ثم تمت إضافة العدد عشرة إليه .

إذا فإن لدينا أولا عملية ضرب ثم لدينا عملية جمع , و كما تعلمون فإن عملية القسمة هي العملية المعاكسة لعملية الضرب كما أن عملية الجمع هي العملية المعاكسة لعملية الطرح.

و لحل هذه المعادلة فإننا نقوم بعكس العمليات الرياضية كما نقوم كذلك بعكس ترتيب حدوثها فنقوم أولا بطرح العدد عشرة لأن عملية الطرح هي العملية المعاكسة لعملية الجمع ومن ثم نقوم بالقسمة على ثلاثة لأن عملية القسمة هي العملية المعاكسة لعملية الضرب.

□ لاحظ بأنه إذا كان اتجاه العمليات الرياضية في المعادلة يتم من الجهة اليسرى إلى الجهة اليمنى فإن اتجاه حل المعادلة يجب أن يكون باتجاه معاكس أي من الجهة اليمنى إلى الجهة اليسرى.

$3X-10=5$

في هذه المعادلة تم ضرب المجهول X بالعدد 3 ثم تم طرح العدد عشرة من الناتج فكانت النتيجة خمسة : لدينا إذا أولا عملية ضرب بالعدد 3 ثم لدينا عملية طرح للعدد عشرة.

إن عكس عملية الضرب هي عملية القسمة و عكس عملية الطرح هي عملية الجمع.

و لحل هذه المعادلة يتوجب علينا كذلك أن نعكس اتجاه سير العمليات الرياضية ولذلك فإننا نضيف أولا عشرة :

$5+10=15$

ثم نقسم على 3 لأن عملية القسمة هي العملية المعاكسة لعملية الضرب:

$15\div3=5$

إذا فإن:

$3X-10=5$

3 ضرب المجهول X ناقص 10 يساوي 5 .

$3X5=15-10=5$

إذا فإن المجهول X يساوي 5 .

25Y-15=60

تحليل المعادلة :

بداية نجد بأن سير العمليات الرياضية في هذه المعادلة يتم من الجهة اليسرى باتجاه الجهة اليمنى.

هنالك أولا عملية ضرب في هذه المعادلة حيث تم ضرب المتغير Y بالعدد 25 :

Y25

ثم لدينا عملية طرح حيث تم طرح 15 من ناتج ضرب المتغير Y بالعدد 25 :

25Y-15

إذا فإن لدي عمليتين في هذه المعادلة : الأولى عملية ضرب و الثانية عملية طرح.

حل المعادلة :

25Y-15=60

أنتم تعلمون بالطبع بأن القسمة هي العملية المعاكسة لعملية الضرب كما أن الجمع هو العملية المعاكسة لعملية الطرح , و الآن لحل المعادلة السابقة فإننا نعكس اتجاه سير العمليات الرياضية فنبدأ من الجهة اليمنى , أي أننا نبدأ بآخر عملية جرت في المعادلة الأصلية وهي عملية الطرح أي عملية طرح العدد 15 من من ناتج ضرب المجهول Y بالعدد 25 فنقلب تلك العملية إلى عملية جمع فنقول :

60+15=Y25

و نحن نعلم بأن :

60+15=75

إذا فإن :

Y25=75

الآن بعد أن قمنا بقلب عملية الطرح إلى عملية جمع بقي علينا أن نقلب عملية الضرب حتى نحل المعادلة , و أنتم تعلمون بأن Y25 تعني Y ضرب 25 , و هذا يعني بأن حاصل ضرب المجهول Y بالعدد 25 يساوي 75 , فكيف نعرف إذا قيمة المجهول Y ؟

ببساطة فإننا نعكس عملية الضرب أي نقسم 75 على 25 و بذلك نعرف قيمة المجهولY .

فنقول :

75/25=3

75÷25=3

إذا فإن المجهول Y يساوي 3 .

---

Y-7/3=(-15)

المجهولy ناقص 7 على 3 يساوي 15 سالب

تحليل المعادلة:

أولا تم طرح العدد 7 من المتغير المجهول Y .

تم تقسيم الناتج على 3

حصلنا على ناتج قدره ناقص15 -15

□ خطة حل المعادلة:

نقوم بعكس ما هية العمليات , كما نقوم بعكس ترتيبها .

بدأنا من آخر عملية قمنا بإجرائها و هي عملية قسمة ناتج طرح العدد سبعة من المجهول Y على العدد 3 .

Y-7/3

Y-7÷3

نقوم بعكس عملية القسمة هذه محولين إياها إلى عملية ضرب فنكتب:

3×-15=-45

3 ضرب ناقص 15 يساوي ناقص45 .

45-

| **علينا ملاحظة كيف أننا حولنا عملية المساواة = في آخر المعادلة إلى عملية ضرب و بذلك تحولت علاقة المساواة:**<br>**3=(-15)**<br>**إلى علاقة ضرب :**<br>**3×-15=-45** |
|---|

إذا علينا الانتباه إلى مسألة هامة و هي أننا عندما نقوم بعكس ترتيب و ما هية العمليات الرياضية فليس ضروريا أن نعكس العملية الجارية بعينها بمعنى أن علاقة القسمة كانت بين هذه العناصر :

Y-7/3

ولكننا عندما عكسنا عملية القسمة و حولناها إلى عملية ضرب لم نقل :

~~Y-7×3~~

و إنما حولنا علاقة المساواة (-15)=3 إلى عملية ضرب:

$3\times-15=-45$

:

كما تذكرون فقد مر معنا بأن حصيلة ضرب عدد موجب مع عدد سالب هي عدد سالب و لذلك فإن:

$3\times-15=-45$

3 ضرب ناقص15 تساي ناقص45

الآن نعكس عملية طرح العدد سبعة Y-7 فتصبح عملية جمع فنقول:

$(-45)+7=(-35)$

**علينا الانتباه إلى أننا عندما عكسنا عملية الطرح Y-7 و حولناها إلى عملية جمع فإننا لم نفعل ذلك مع العناصر ذاتها, أي أننا لم نقل :**

**Y+7**

**و إنما فإننا قمنا بذلك مع ناتج عملية الضرب السابقة فقلنا :**

**$(-45)+7$**

**لماذا؟**

**لأنه عمليا ما من فائدة ترجى من تحويلنا لعملية الطرح Y-7 إلى عملية جمع Y+7 لأننا أساسا نجهل ماهية ذلك ال Y .**

**إذا فإننا عندما نعكس ترتيب و ما هية العلاقات الرياضية في المعادلات الرياضية فإننا لا نقوم بذلك غالبا مع عناصر مجهولة مثل Y و X إذ ما من فائدة ترجى من ذلك و إنما فإننا نفعل ذلك بين أعداد ثابتة معروفة حقيقية بحيث نحصل على نتائج و اضحة تمكننا من اكتشاف ما هية المجاهيل و المتغيرات في المعادلة .**

ناقص 45 زائد 7 يساوي ناقص 38

إذا فإن المجهول Y يساوي ناقص 38

$Y=(-38)$

إذا فإن:

$Y-7/8=(-15)$

$(-38)-7/3=(-15)$

تأكد عن طريق الآلة الحاسبة من صحة ما قمنا به و لكن انتبه إلى ناحية و هي أنه لا يتوجب علينا إدخال العملية بأكملها ثم الضغط على زر المساواة و إنما يتوجب علينا أن نقسم هذه المعادلة إلى أجزاء فنقول ناقص 38 ناقص 7 يساوي ناقص 45 ثم نقوم بقسمة هذا الناتج على 3 فنحصل على ناقص 15 .

□ إذا إن حل معادلة تحوي مجهولا وحدا يتطلب منا أن نعكس العمليات الرياضية في تلك المعادلة : الضرب تصبح قسمة و القسمة تصبح ضرب و عملية الطرح تصبح عملية جمع و عملية الجمع تصبح عملية طرح.

كما يتطلب حل المعادلات منا أن نجري تلك العمليات بشكل معاكس فإذا كان الاتجاه الطبيعي لحل العمليات الرياضية يتم من اليسار إلى اليمين فإن حل المعادلات الرياضية يستدعي البدء بإجراء العمليات الرياضية من الجهة اليمنى باتجاه الجهة اليسرى.

□

$-90/Y(-15)=(-45)$

ناقص 90 على Y ضرب ناقص15 يساوي ناقص45 .

تحليل المعادلة :

العملية الأولى في المعادلة السابقة هي عملية قسمة وهي عملية قسمة العدد 90 على Y .

ثم لدينا عملية ضرب حيث تم ضرب ناتج عملية القسمة $-90/Y$ بناقص (15-) ثم حصلنا على النتيجة ناقص (-45).

حل المعادلة :

$-90/Y(-15)=(-45)$

نبدأ بحل هذه المعادلة عن طريق عكس عملية الضرب $Y(-15)$ لتصبح عملية قسمة :

$Y(-15)=Y\times-15$

بالطبع فإن وجود المجهول Y بجوار القوس يعني بأن علينا أن نقوم بضربه بمحتويات القوس:

$Y(-15)=Y\times-15$

□ نضع إشارة قسمة مكان إشارة التساوي = و نقسم الناتج ناقص45 على 15 فيصبح لدينا :

$-45\div(-15)=3$

ناقص 45 تقسيم ناقص 15 يساوي 3 .

أصبح لدينا العدد 3 .

**علينا الانتباه إلى أننا عندما عكسنا عملية الضرب $-15\times Y$ و حولناها إلى عملية قسمة فإننا لم نفعل ذلك مع العناصر ذاتها , أي أننا لم نقل :**

**$Y\div -15$**

**و إنما فإننا قلنا :**

**$-45\div(-15)=3$**

**ناقص 45 تقسيم ناقص 15 يساوي 3 .**

**لماذا ؟**

**لأنه عمليا ما من فائدة ترجى من تحويلنا لعملية الضرب $-15\times Y$ إلى عملية قسمة لأننا أساسا نجهل ما هية ذلك ال Y .**

**إذا فإننا عندما نعكس ترتيب و ما هية العلاقات الرياضية في المعادلات الرياضية فإننا لا نقوم بذلك غالبا مع عناصر مجهولة مثل Y و X إذ ما من فائدة ترجى من ذلك و إنما فإننا نفعل ذلك بين أعداد ثابتة معروفة حقيقية بحيث نحصل على نتائج واضحة تمكننا من اكتشاف ما هية المجاهيل و المتغيرات في المعادلة .**

| $-45\div(-15)=3$ |
| --- |

□ لاحظ بأننا الآن بعد أن أبدلنا إشارة المساواة بإشارة قسمة و بعد أن أجرينا عملية القسمة فإننا نكون بذلك قد تخلصنا من عددين و هما -45 ناقص 45 و ناقص15 و حصلنا بدلا منهما على ناتج القسمة و هو العدد 3 .

□ علينا الانتباه إلى أننا قسمنا العدد السالب ناقص 45 على العدد السالب ناقص 15 فحصلنا على العدد الموجب3 .

تذكر دائما بأن عدد سالب تقسيم عدد سالب يعطي عدد موجب.

سالب ÷سالب=موجب

عدو (سالب) عدوك(سالب) هو صديقك(موجب)

الآن نكمل حل المعادلة و نحن معنا العدد 3 من العملية الأولى و نجد العملية التالية :

$-90/Y$

و هي عملية قسمة أي $-90\div Y$ نقوم بعكسها فنحصل على عملية ضرب فتصبح لدينا المعادلة التالية:

$3\times Y=(-90)$

□ فقط للتذكرة :

بعد أن أجرينا عملية القسمة فإننا نكون بذلك قد تخلصنا من عددين و هما -45 ناقص 45 و ناقص15 و حصلنا بدلا منهما على ناتج القسمة و هو العدد 3 .

الآن بقي لدينا ثلاثة أطراف و هي العدد ثلاثة و هو عدد موجب و هو ناتج عملية القسمة السابقة كما أن لدينا العدد ناقص 90 و المجهول Y و لدينا عملية ضرب

أخيرة و هي العملية المعاكسة لأول عملية في المعادلة الأصلية و هي عملية قسمة Y÷90- .

إذا لدينا الآن عملية ضرب و العدد الموجب 3 و العدد السالب ناقص 90- فنكتب المعادلة بكل بساطة و كأنها عملية ضرب اعتيادية :

$3\times Y=(-90)$

3 ضرب المجهول Y يساوي ناقص90-

إذا فإن :

$-90\div 3=y$

ناقص 90 تقسيم 3 يساوي المجهول y .

إذا نجري عملية القسمة:

$-90\div 3=(-30)$

ناقص 90 تقسيم 3 يساوي ناقص 30- .

إذا فإن المجهول y يساوي ناقص30- .

تأكد باستخدام الآلة الحاسبة من ذلك الأمر:

$-90/-30(-15)=(-45)$

$-90\div-30(-15)=(-45)$

□ تذكرة :

لإجراء العمليات الحسابية على الأعداد السلبية قم بضغط زر تبديل الإشارة ± بعد العدد الذي تريد تغيير إشارته ليصبح عددا سالبا.

لاحظ عملية القسمة :

$-90\div 3=(-30)$

قسمنا عددا سالبا هو العدد ناقص-90 على عدد موجب هو العدد +3 فكانت النتيجة عددا سالبا و هي ناقص-30 :

سالب تقسيم موجب يساوي سالب .

عدو صديقك عدوك : عدو (سالب) صديقك(موجب) هو عدوك(سالب) .

□ كما تلاحظون فإنني اتبع أسلوبا مطولا في الشرح لغايات تعليمية و لكنكم عندما تتمكنون من حل المعادلات و تصبحون خبراء بإذن الله بهذا الشأن فإنكم لن تحتاجوا لإجراء كل تلك الخطوات .

---

## □ حل المعادلات التي تحوي مجاهيل في كلا طرفيها

**إن حل المعادلات التي تحتوي على مجهولين اثنين , أي المعادلات التي تحتوي على مجهول في كل طرف من طرفيها يستدعي حذف أو إسقاط أحد المجهولين و هذا الأمر يتطلب منا القيام بطرح المجاهيل المتشابهة من بعضها البعض .**

مثال :

$7y-4=5y+2$

في المعادلة السابقة لدينا مجهول في كلا طرفي المعادلة و هو المجهول y و لهذا السبب فإننا نطرح المتغيرين المجهولين من بعضهما البعض حتى نتخلص من أحد هما فنكتب:

$7Y-5Y=2Y$

و بذلك تصبح المعادلة $7y-4=5y+2$

على الشكل التالي:

$2Y-4=2$

لأننا عندما طرحنا 5y من 7y تخلصنا من أحد المجهولين .

نعكس عملية الطرح$2Y-4=2$

لتصبح عملية جمع فنقول:

$2+4=2Y$

$2+4=6$

لاحظ كيف أننا حولنا علاقة المساواة إلى عملية جمع.

الخطوة قبل الأخيرة الحاسمة في حل المعادلات الرياضية تتمثل دائما في أن أحول المعادلة الرياضية إلى عملية رياضية بين عنصرين معلومين بحيث يكون الناتج عنصرا مجهولا و هو الأمر الذي سيمكنني من اكتشاف ذلك المجهول:

$2+4=2Y$

| $6=4+2$ |
| --- |

إذا فإن $2Y$ يساوي 6 .

و بما أن $6=2Y$ أي أن 2 ضرب Y تساوي 6 .

$2Y=$

$2\times Y=6$

و هذا يعني بأن المجهول Y ضرب 2 يساوي 6 .

نعكس عملية الضرب $2Y$ لتصبح عملية قسمة فنكتب بأن 6 تقسيم 2 تساوي 3 لأننا قلنا سابقا بأن $2Y$ يساوي 6 أي أن 2 ضرب Y يساوي 6 و عليه فإن المجهول Y يساوي 3 .

□ تأكد بأن المجهول Y يساوي 3 أي قم بإبدال المجهول Y بالعدد 3:

$7y-4=5y+2$

$7\times 3=21$

$21-4=17$

$5\times 3=15$

$15+2=17$

الحل صحيح.

---

□إذا احتوت المعادلة على متغيرين اثنين متماثلين فإن بإمكانك تبسيط المعادلة عن طريق التخلص من أحدهما إما بحذف أحدهما أو بإضافته للمجهول الآخر .

□ دائما بعد قيامك بحل أية معادلة قم بالتأكد من صحة الحل عن طريق إعادة حل المعادلة الأصلية مع القيام بإبدال المجهول أو المجاهيل الموجودين فيها بالحل الذي قمت بالتوصل إليه فإذا كان الجواب متطابقا فهذا يعني بأن طريقة الحل صحيحة و إلا فإن عليك أن تعيد حل المعادلة بطريقة مختلفة أو أن تعيد الانتباه إلى عناصر المعادلة خوفا من أنك قد أهملت إحدى التفاصيل مثل عدم الانتباه إلى الأعداد السلبية مثلا.

مثال جديد :

$3y+5+10y+4=74$

لدينا في المعادلة السابقة مجهولين اثنين نقوم بضمهما إلى بعضهما البعض للتخلص من أحد هما فنكتب:

$3y+10y=13Y$

و بذلك يصبح لدينا مجهول واحد هو $10Y$ .

الآن نقوم بالتقليل كذلك من الأطراف الموجودة في المعادلة عن طريق الجمع فنكتب:

$4+5=9$

و بذلك نكون قد اختزلنا العددين 4 و 5 في عدد واحد هو العدد 9 .

و بذلك تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$13Y+9=74$

أعكس عملية الجمع إلى عملية طرح فيصبح لدي:

$74-9=13Y$

إذا فإن المجهول 13Y يساوي 74 ناقص 9 .

$74-9=65$

إذا فإن 13Y تساوي 65

أي أن :

$13\times y=65$

نعكس عملية الضرب محولين إيا ها إلى عملية قسمة:

$65\div 13=y$

المجهول y يساوي 65 تقسيم 13 .

$65\div 13=5$

إذا فإن المجهول y يساوي 5 .

نتأكد من الإجابة: حتى نتأكد من صحة ما قمنا به من خطوات في حل المعادلة و للتأكد من صحة الحل نستبدل المجا هيل في المعادلة بالعدد 5 الذي توصلنا إليه:

هذه هي المعادلة:

$3y+5+10y+4=74$

$3\times 5=15$

$15+5=20$

$10\times 5=50$

$20+50=70$

$70+4=74$

إذا فإن الحل صحيح.

□ تذكر بأنه إذا كان لدينا مجهولين y أو X مثلا و أردنا ضمهما إلى بعضهما البعض حتى نتخلص من أحد هما فإننا نكتب:

Y+Y=2Y

X+X=2X

---

---

□ هل يمكن أن يكون للمعادلة الواحدة أكثر من حل واحد ؟

نعم يمكن لبعض المعادلات أن يكون لها أكثر من حل واحد صحيح .

مثال : المعادلة Y=Y مثلا لأن أي حل تقدمه لهذه المعادلة يعتبر صحيحا شريطة أن يكون الحل عددا طبيعيا .

و قولنا مثلا أن Y=Y يعني بأن Y أيا كان فإنه يساوي نفسه فإذا قلت بأن Y يساوي 8 فالحل صحيح لأن 8=8 و لو قلت بأن المجهول Y يساوي 90 فالحل كذلك صحيح لأن 90=90 .

مثال آخر على المعادلات التي يمكن أن يكون لها أكثر من حل صحيح واحد :

على سبيل المثال :

Y^2=16

$Y^2=16$

المجهول Y المرفوع للقوة الثانية يساوي 16 .

يمكن أن يكون حل المعادلة هو العدد 4 لأن 4 مرفوعا للقوة الثانية يساوي 16 :

4∧2=16

$4^2=16$

كما أن هنالك حل آخر لهذه المعادلة و هو ناقص4 مرفوعة للقوة الثانية:

−4∧2=16

$-4^2=16$

□ تأكد باستخدام الآلة الحاسبة من أن ناقص أربعة مرفوعة للقوة الثانية يساوي 16 :

نضغط العدد 4

نضغط زر تبديل الإشارة ±

نضغط زر الرفع للقوة ∧ أو $X^Y$

نضغط العدد 2 لأننا نريد رفع العدد للقوة الثانية.

حتى لا تنسى :

**تذكرون قاعدة ضرب و تقسيم الأعداد السلبية مع بعضها البعض : سالب تقسيم سالب يساوي موجب و سالب ضرب سالب يساوي موجب .**

**عدو (سالب) عدوك(سالب) صديقك(موجب)**

**إن رفع العدد ناقص 4 للقوة الثانية تعني ناقص 4 ضرب ناقص 4 تساوي 16 موجب:**

$$(-4)\times(-4)=+16$$

**سالب ضرب سالب يساوي موجب.**

إن المعادلات التي لها أكثر من حل واحد تدعى باللامتعادلات أو غير المتعادلات Inequalities .

إذا :

□ يكون للمعادلة Equation حل واحد فقط أي أنه يكون للمجهول في المعادلة قيمة واحدة فقط, أما اللامتعادلة Inequality فتكون ذات عدة حلول أي أن المجهول فيها يكون ذو عدة قيم.

□ عندما يكون في المعادلة أكثر من مجهول واحد عندها يمكن أن يكون هنالك الكثير من الاحتمالات الصحيحة و التي لا يمكن لأحد أن يقول بعدم صحتها فلو قلت مثلا بأن :

Y+T=9

فمن الممكن أن تكون قيمة المجهول Y 6 ومن الممكن أن تكون قيمة المجهول T 9 ومن الممكن أن يكون العكس أي أن تكون قيمة المجهول Y العدد 9 ومن الممكن أن تكون قيمة المجهول T العدد 3 .

ومن الممكن أن تكون قيمة المجهول Y مساوية لأربعة 4 بينما تكون قيمة المجهول T مساوية لخمسة 5 ومن الممكن أن تكون قيمة المجهول T مساوية لأربعة 4 بينما تكون قيمة المجهول Y مساوية لخمسة 5 .

ومن الممكن أن تكون قيمة المجهول Y مساوية لسبعة 7 بينما تكون قيمة المجهول T مساوية لاثنين 2 ومن الممكن أن يكون العكس أي أن تكون قيمة المجهول Y مساوية لإثنين 2 بينما تكون قيمة المجهول لسبعة 7 .

بالإضافة إلى الكثير من الاحتمالات الأخرى من الكسور و الأعداد السلبية و غيرها...

□ معادلات غير منطقية و ما من حل منطقي لها :

مثال :

Y=Y+1

بمعنى أن المجهول Y يساوي نفسه مضافا إليه العدد واحد , و هو أمر غير منطقي لأنه لا يمكن لأي عدد أن يكون مساويا لما هو أكبر منه أي أنه لا يمكن لأي عدد أن يكون مساويا لنفسه زائد واحد .

مثل قولك مثلا بأن سامر يساوي سامر+رامي

سامر=سامر+رامي

و هي مقولة خاطئة .

المعادلة صفر ضرب المجهولY يساوي الصفر :

Y0=0

معادلة صحيحة لأننا إذا ضربنا أي عدد طبيعي بصفر فإن الناتج يكون صفرا.

0Y=0×Y=0

Y0=0

ولو أننا أبدلنا y باي عدد طبيعي فإن المعادلة ستكون صحيحة فلو قلنا مثلا بأن y يساوي 5 فإن :

0×5=0

المعادلة $0y=9$ مثلا هي معادلة خاطئة لأنها تعني بأن :

$0y=0\times y=9$

و هي خاطئة لأنه لايوجد عدد إذا ضربته بصفر يكون الناتج غير الصفر .

غير أن المعادلة $3y=0$ هي معادلة صحيحة و لها حل و هو $y=0$ , فإذا اعتبرنا بأن المجهول y يساوي الصفر فإننا إذا ضربناه بأي عدد طبيعي فإن الناتج سيكون صفرا .

## □ الإحداثيات Coordinate

إذا رسمنا مستقيمين متقاطعين عند نقطة هي نقطة الصفر و إذا قمنا بترقيم هذين المستقيمين بأعداد سالبة و موجبة : أعداد موجبة فوق الصفر و أعداد سلبية تحت الصفر , و أعداد موجبة إلى يمين الصفر و أعداد سلبية إلى يسار الصفر, ومن الممكن أن نرقم المستقيم الأفقي بأعداد سلبية و إيجابية و أن نرقم المستقيم العمودي بأحرف على أن تكون نقطة تقاطع هذين المستقيمين هي الصفر وبذلك يصبح بإمكاننا أن نحدد مكان أية نقطة من خلال ذكر إحداثيتيها , أي من خلال تحديد موقع التقاء نقطة أفقية مع نقطة عمودية .

إن الثنائية (b,1) مثلا تدعى بإحداثية coordinate تلك النقطة , و يمكننا باستخدام هذه الطريقة في التمثيل أن نحدد موقع أي نقطة .

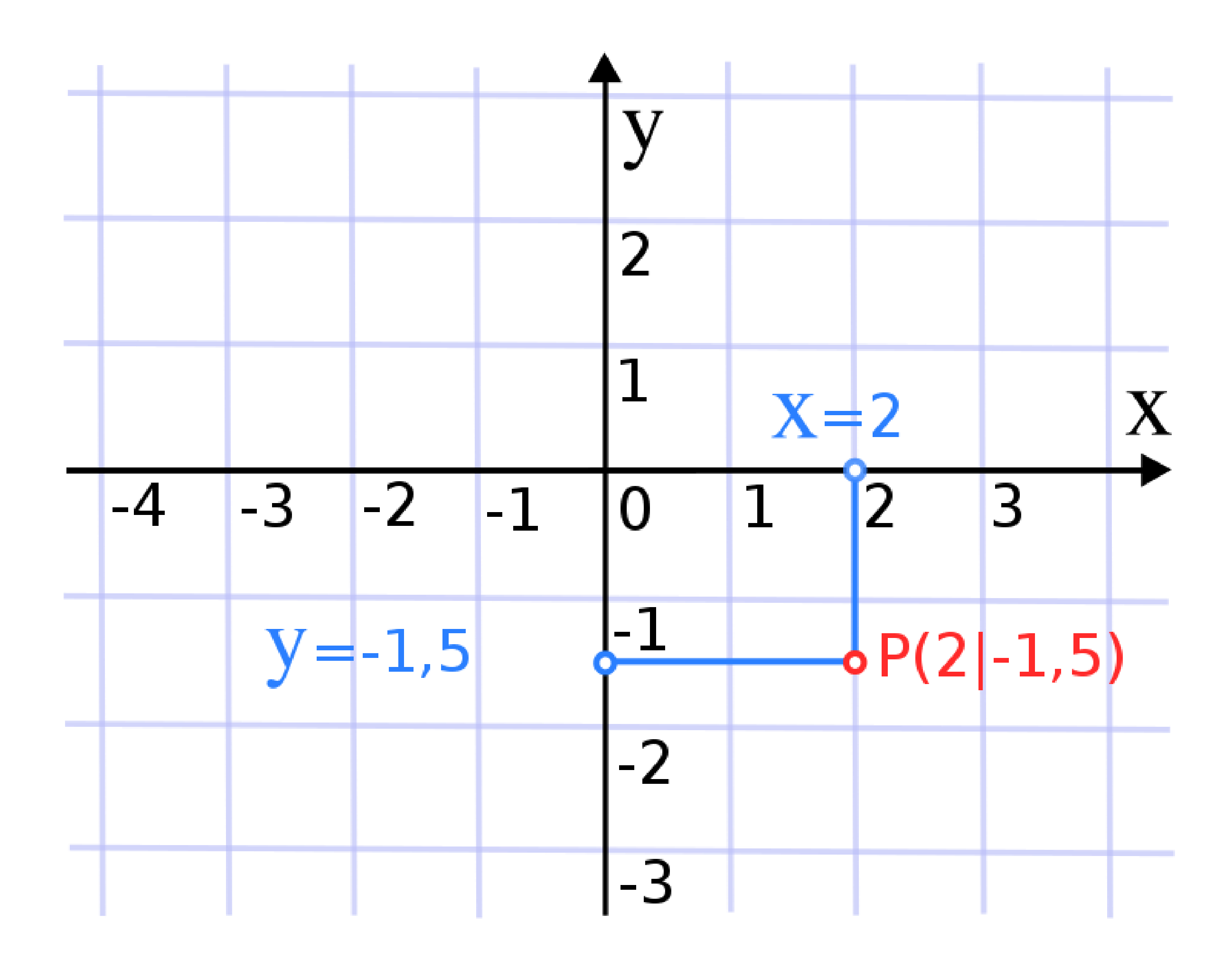
نظام التمثيل الإحداثي الديكارتي The Cartesian coordinate system : دعيت هذه المنظومة بهذا الاسم نسبة إلى رينيه ديكارت Rene Descartes .

يتم تشكيل نظام التمثيل الإحداثي الديكارتي على شكل مستقيمين متقاطعين متعامدين مرقمين بأعداد سلبية و إيجابية - المحور أو المستقيم العمودي يدعى بمحور y Y-axis , بينما يدعى المستقيم الأفقي بتسمية X-axis .

و يلتقي هذين المستقيمين المتقاطعين عند نقطة الصفر.

تتوضع الأعداد الموجبة على المحور العمودي فوق الصفر بينما تتوضع الأعداد السالبة تحت الصفر , و تتوضع الأعداد الموجبة إلى يمين الصفر على المحور الأفقي ينما تتوضع الأعداد السلبية إلى يساره .

و يقسم هذين المحورين المتعامدين اللوحة إلى أربعة أقسام أو أربعة أرباع .




## حساب الاحتمالات Probability

حساب الاحتمالات:
أراد سامر في نهاية العام المدرسي أن يلتقط صورة مع صديقه نور أمام جدار:
كان هنالك وضعين فقط يمكن التقاطهما و هما أن يقف سامر إلى يسار نور أو أن يقف سامر إلى يمين نور ، فكان هنالك احتمالين فقط و هما :

سامر - نور او نور - سامر
الآن أراد صديقهما محمد أن ينضم إليهما و أن يلتقط معهما صورا تذكارية , فكم صورة يمكن الآن لهما التقاطها و كم هي عدد الاحتمالات الممكنة لالتقاط الصور:
الاحتمال الأول : أن يكون سامر بين محمد و نور.
محمد - سامر - نور
الاحتمال الثاني : أن يكون محمد بين سامر و نور.
سامر - محمد - نور
الاحتمال الثالث : أن يكون نور بين محمد و سامر.
محمد - نور- سامر
الاحتمال الرابع : أن يقف نور إلى اليمين و أن يكون سامر في المنتصف و محمد إلى اليسار:
نور - سامر - محمد
الاحتمال الخامس : : أن يقف سامر إلى اليمين و أن يكون نور في المنتصف و ان يقف محمد إلى اليسار:
سامر - نور - محمد
الاحتمال السادس و الأخير : أن يقف نور إلى اليمين و ان يكون محمد في المنتصف و أن يقف سامر إلى اليسار.
نور - محمد سامر
كيف نحسب الاحتمالات هنا ؟
في الحالة الأولى كان لدينا سامر و نور فقط و كان لديهما احتمالين فقط لالتقاط الصورة و هما :
أن يقف سامر إلى يسار نور أو أن يقف سامر إلى يمين نور:
سامر - نور او نور - سامر
في الحالة الثانية دخل محمد إلى موقع التقاط الصور و كان لديه ثلاثة احتمالات بالنسبة لسامر و نور و هذه الاحتمالات الثلاثة هي:
أن يقف إلى يمين سامر و نور:
محمد - سامر -نور
أن يقف إلى يسار سامر و نور.
سامر - نور - محمد
أن يقف بين سامر و نور.
سامر -محمد- نور

الآن حتى نتوصل إلى جميع الاحتمالات الممكنة فإننا نضرب الاحتمالات التي كانت ممكنة قبل وصول محمد بالاحتمالات التي أصبحت ممكنة بعد وصول محمد ( الخيارات التي كانت متوفرة لسامر و نور قبل وصول محمد و الاحتمالات التي كانت متوفرة لمحمد بعد وصوله:
$2\times3=6$

قم بقص مربعات من الورق ذات ألوان ثلاثة و حاول أن ترتب كل ثلاثة منها إلى جوار بعضها البعض على خط مستقيم بحيث تحصل على اكبر عدد ممكن من المصفوفات التي لا تشبه الواحدة منها الأخرى.
قم بقص مربعات من الورق و اكتب على بعضها اسم نور و على بعضها الآخر اسم سامر و على بعضها اسم محمد و حاول أن ترتب كل ثلاثة منها إلى جوار بعضها البعض على خط مستقيم بحيث تحصل على اكبر عدد ممكن من المصفوفات التي لا تشبه الواحدة منها الأخرى.

■ الآن انضم عمر إلى كل من محمد و سامر و نور فأصبحوا أربعة - ما هي الاحتمالات التي يمكن لهم أن يقفوا وفقها لالتقاط صورة أمام جدار المدرسة بحيث يكونون على نسق واحد في مواجهة الكاميرة و وجوههم جميعا متجهة نحو الكاميرة؟
نحن نعلم قبل انضمام عمر بأنه كان هنالك ستة أوضاع اتخذها سامر و نور و محمد , فما هي الأوضاع الاضافية التي يمكن أن يؤدي انضمام عمر إلى حدوثها ؟
الاحتمال الأول : يمكن ان يقف عمر إلى أقصى يمين المجموعة بحيث يكون الثلاثة الآخرين إلى يساره.
عمر - سامر - محمد -نور
الاحتمال الثاني : يمكن لعمر أن يقف إلى اقصى يسار المجموعة بحيث يكون الثلاثة الآخرين إلى يمينه.
سامر - محمد - نور-عمر
الاحتمال الثالث : أن يقف بين الأول و الثاني , أي أن يقف بين سامر و محمد:
سامر - عمر - محمد - نور
الاحتمال الرابع : أن يقف عمر بين الثاني و الثالث , أي ان يقف ما بين محمد و نور:
سامر - محمد - عمر - نور

الآن فأن لدينا ستة احتمالات سابقة يمكن للأصدقاء الثلاثة أن يتخذوها و لدينا الآن أربع احتمالات جديدة بعد ان انضم عمر إليهم و بناء على طريقة حساب الاحتمالات فإن جميع الاحتمالات المتاحة لهؤلاء الأصدقاء الأربعة تساوي 6×4=24
أربعة و عشرين احتمالا ممكنا ناتجة عن جداء ستة في أربعة.
هل لديك شك في طريقة حساب الاحتمالات هذه ؟
هل تعتقد بأن احتمالات الممكنة لا تصل إلى أربعة و عشرين احتمالا ؟
حسنا دعنا نتأكد من ذلك الأمر بشكل عملي:
الاحتمالات:
عمر - محمد - نور - سامر
عمر - نور - محمد - سامر

عمر –نور –سامر –محمد
عمر – سامر – نور – محمد
عمر – سامر – محمد – نور
عمر – محمد –سامر –نور
محمد – عمر – نور – سامر
محمد – نور – عمر –سامر
محمد – نور – سامر –عمر
محمد – عمر – سامر – نور
محمد – سامر – عمر – نور
محمد – سامر – نور – عمر
سامر – محمد – عمر –نور
سامر – محمد –نور –عمر
سامر – نور – محمد –عمر
سامر – نور – عمر – محمد
سامر – عمر –محمد – نور
سامر – عمر – نور – محمد
نور – محمد – عمر – سامر
نور – محمد – سامر – عمر
نور – عمر – سامر – محمد
نور – عمر – محمد – سامر
نور – سامر – محمد – عمر
نور – سامر – عمر – محمد

أربعة و عشرين احتمالا – إذا طريقة حساب الاحتمالات صحيحة .
يمكنك أن تكتب الأسماء الأربعة على قطع ورق و أن تصنع منها أكبر عدد ممكن من المصفوفات على شرط أن تتألف كل مصفوفة من أربعة أسماء متوضعة على نسق واحد و أن لا يكون هنالك تشابه بين مصفوفة و أخرى.
و بشكل مختصر فإن بإمكاننا أن نحسب الاحتمالات بالنسبة لثلاثة اشخاص او ثلاثة أشياء على الشكل التالي:
$1\times2\times3=6$
ستة احتمالات
و يمكننا ببساطة ان نحسب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لأربعة أشخاص أو اربعة أشياء على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4=24$
كما مرت معنا سابقا
و يمكننا حساب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لخمسة أشخاص أو خمسة أشياء على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4\times5=120$
لنتأكد من صحة هذا الأمر:
لنفترض بأن صديقا جديدا انضم إلى الأصدقاء الأربعة و اسمه مجد , ما هي الاحتمالات التي يمكن أن يظهر فيها مجد في

الصورة مع أصدقائه الأربعة:
الاحتمال الأول : أن يقف في أقصى اليمين.
الاحتمال الثاني : أن يقف بعد الأول (من اليمين)
الاحتمال الثالث: أن يقف بعد الثاني.
الاحتمال الرابع : أن يقف بعد الثالث.
الاحتمال الخامس : أن يقف بعد الرابع ( في أقصى اليسار)
لدينا خمسة احتمالات و كان لدينا 24 احتمال قبل وصول مجد/
$5\times24=120$
120 احتمال.
و أذا انضم للمجموعة صديق جديد , أي في حال أصبح هنالك ستة أصدقاء فإننا نحسب الاحتمالات الممكنة على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4\times5\times6=720$
لنتأكد من الأمر:
نفترض بأن صديقا جديدا هو عبيدة قد انضم إلى المجموعة ليلتقط صورة معهم فما هي الاحتمالات المتاحة أمامه:
عبيدة – مجد – محمد – عمر – نور – سامر
مجد – عبيدة – محمد – عمر – نور – سامر
مجد – محمد – عبيدة – عمر – نور – سامر
مجد – محمد – عمر – عبيدة – نور – سامر
مجد – محمد – عمر – نور – عبيدة – سامر
مجد – محمد – عمر – نور – سامر – عبيدة
لدينا ستة احتمالات و كان لدينا سابقا 120 احتمال.
$6\times120=720$
أي أن هنالك 720 احتمال للمواقع التي يمكن أن يتخذها ستة أصدقاء عندما يقفون بجوار بعضهن البعض امام عدسة الكاميرة.
النتيجة صحيحة.
$1\times2\times3\times4\times5\times6=720$

لو كان هنالك عشرة أصدقاء يريدون التقاط صور إلى جانب بعضهم البعض فإننا ببساطة نحسب الاحتمالات الممكنة على الشكل التالي:
$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10=362880$
هنالك 362880 احتمال متاحة أمام عشرة أشخاص حتى يلتقطوا صورا بجوار بعضهم البعض على نسق واحد و وجوههم متجهة نحو عدسة الكاميرة.

■لدينا أربع سيارات و كراج مؤلف من عشر مواقف لوقوف السيارات , ما هي جميع الاحتمالات المتاحة لنا لإيقاف تلك السيارات في تلك المواقف العشرة ؟
بداية نحسب الاحتمالات المتاحة بالنسبة للسيارات الأربعة

بالنسبة لبعضها البعض وفق الطريقة المعتمدة لحساب الاحتمالات:

أربع سيارات:

$1\times2\times3\times4=24$

24 احتمالا – لنتأكد بشكل عملي ملموس من مصداقية هذه الطريقة في الحساب:

مرسيدس – تويوتا – كيا – كاديلاك
مرسيدس– كيا – تويوتا – كاديلاك
مرسيدس – كاديلاك – تويوتا –كيا
مرسيدس –كاديلاك – كيا – تويوتا
مرسيدس – كيا – كاديلاك – تويوتا
مرسيدس – تويوتا – كاديلاك – كيا
تويوتا – مرسيدس – كيا – كاديلاك
تويوتا –مرسيدس – كاديلاك – تويوتا
تويوتا – كيا – مرسيدس – كاديلاك
تويوتا – كيا – كاديلاك – مرسيدس
تويوتا – كاديلاك – كيا – مرسيدس
تويوتا – كاديلاك – مرسيدس – كيا
كيا – مرسيدس – كاديلاك – تويوتا
كيا – مرسيدس – تويوتا – كاديلاك
كيا – تويوتا – مرسيدس – كاديلاك
كيا – تويوتا – كاديلاك – مرسيدس
كيا – كاديلاك – تويوتا – مرسيدس
كيا – كاديلاك – مرسيدس – تويوتا
كاديلاك – كيا – مرسيدس – تويوتا
كاديلاك – كيا – تويوتا – مرسيدس
كاديلاك – مرسيدس– كيا – تويوتا
كاديلاك – مرسيدس – تويوتا – كيا
كاديلاك – كيا – تويوتا – مرسيدس
كاديلاك – كيا – مرسيدس– تويوتا

24 احتمال – الطريقة صحيحة

ولو كان لدينا خمس سيارات لحسبنا الاحتمالات الممكنة كالاتي:

$1\times2\times3\times4\times5=$

ولو كان لدينا ست سيارات لحسبنا الاحتمالات الممكنة على الشكل التالي:

$1\times2\times3\times4\times5\times6=$

وهكذا...

الآن لدينا عشر مواقف للسيارات في الكراج فما هي الاحتمالات الممكنة لوقوف تلك السيارات الأربعة في تلك المواقف ؟
مثلا:
كاديلاك - موقف فارغ - مرسيدس - موقف فارغ- تويوتا - موقف فارغ - كيا - موقف فارغ- موقف فارغ - موقف فارغ...
و ما إلى ذلك من الاحتمالات...

لكي نعرف ذلك الأمر فإننا نضرب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لأربع سيارات و هي 24 احتمالا كما سبق لنا أن قمنا بحسابها بعدد المواقف و هي هنا عشرة مواقف:
$24 \times 10 = 240$
أي أن هنالك 240 احتمال متاحة أمامنا للكيفية التي يمكن أن نصف فيها أربع سيارات في كراج ( مرآب) مؤلف من عشرة مواقف.

الآن لنفترض بأن هنالك ست شاحنات صغيرة قد وصلت إلى الكراج - ما هي الاحتمالات التي يمكن لهذه الشاحنات الستة أن تقف فيها في الكراج بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للسيارات الأربعة التي كانت موجودة سابقا في الكراج ؟
أولا نحسب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لهذه الشاحنات الستة:
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$
إذا لدينا 720 احتمال للكيفية التي يمكن أن تقف فيها الشاحنات الستة بالنسبة لبعضها البعض.
الآن ما هي الاحتمالات المتاحة لهذه الشاحنات الستة أن تقف فيها بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للسيارات الأربعة الموجودة سابقا في المواقف العشرة الموجودة في الكراج ؟
نحن كنا سابقا قد حسبنا الاحتمالات المتاحة أمام أربع سيارات في عشر مواقف:
$24 \times 10 = 240$
الاحتمالات المتاحة لهذه الشاحنات الستة أن تقف فيها بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للسيارات الأربعة الموجودة سابقا في المواقف العشرة الموجودة في الكراج هي:
$240 \times 720 = 172800$
172800 هي الاحتمالات المتاحة أمام أربع سيارات و ست شاحنات لكيفية الوقوف في كراج يحوي عشرة مواقف.

■ملخص كيفية حساب الاحتمالات:
لحساب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لعدة أشياء فإننا نضرب أعداد تلك الأشياء ببعضها البعض:
مثال الاحتمالات المتاحة أمام خمس طائرات=
1×2×3×4×5=120
لحساب الاحتمالات الممكنة بالنسبة لعدة أشياء بالنسبة لعدة خانات أو مواضع فإننا نضرب عدد الاحتمالات الممكنة بالنسبة لتلك الأشياء في عدد الخانات المتاحة :
مثال ما هي الاحتمالات الممكنة لصف خمس طائرات في مطار يحوي عشر مرابض للطائرات ؟
120×10=1200
1200 احتمال
إذا قمنا بحساب الاحتمالات المتاحة أمام عدد معين من الأشياء في مواضع أو خانات معينة ثم أضيفت أشياء جديدة و طلب منا أن نحسب الاحتمالات الممكنة لتموضع الأشياء الجديدة بالنسبة للأشياء القديمة في الخانات المتاحة فإننا نقوم بضرب الاحتمالات المتاحة أمام الأشياء القديمة بالاحتمالات المتاحة أمام الأشياء الجديدة.
مثال:
حاملة طائرات تحوي 12 منصة لهبوط الطائرات على سطحها , و على سطحها تجثم خمس طائرات - ما هي الاحتمالات المتاحة أمام تلك الطائرات الخمسة المتعلقة بالكيفية التي يمكن أن تجثم فيها على تلك المنصات الاثني عشر ؟
نحسب الاحتمالات المتاحة لتموضع خمس طائرات بالنسبة لبعضها البعض بالشكل التالي:
1×2×3×4×5=120
هنالك 120 احتمال لطرق تموضع الطائرات الخمسة بالنسبة إلى بعضها البعض.
الان نحسب الاحتمالات المتاحة أمام هذه الطائرات الخمسة لكيفية وقوفها في المرابض الاثني عشر الموجودة في حاملة الطائرات و ذلك بضرب الاحتمالات المتاحة امام الطائرات الخمسة في عدد الخانات أو المواضع المتوفرة وهي هنا 12 :
120×12=1440
الرقم 120 يمثل الاحتمالات المتاحة لترتيب الطائرات الخمسة بالنسبة لبعضها البعض.
الرقم 12 هو عدد المنصات الموجودة على سطح حاملة الطائرات.
1440 هو عدد الاحتمالات المتاحة أمام خمس طائرات للوقوف في 12 منصة للطائرات.
الآن هبطت سبع طائرات جديدة على حاملة الطائرات - ما هي

الاحتمالات المتاحة بالنسبة للطائرات السبعة الجديدة و التي يمكن أن تتوضع بها بالنسبة لبعضها البعض و بالنسبة للطائرات الخمسة القديمة الموجودة على سطح حاملة الطائرات في الخانات الاثني عشر المتاحة على سطح حاملة الطائرات؟
نحسب الاحتمالات المتاحة امام الطائرات السبعة بالنسبة لبعضها البعض فنقول:
1×2×3×4×5×6×7=5040
5040 هي الاحتمالات المتاحة امام سبع طائرات.
الآن نضرب رقم الاحتمالات هذا بعدد الاحتمالات المتاحة امام الطائرات الخمسة القديمة في المرابض الاثني عشر أي 1440 فنقول:
1440×5040=7257600
7257600 هي الاحتمالات المتاحة أمام 12 طائرة لكيفية التموضع على سطح حاملة طائرات تحوي 12 مربضا للطائرات

•

لاحظ انه عندما يكون لدينا عدة عناصر و نريد أن نحسب عدد الاحتمالات المتاحة لترتيب تلك العناصر مع بعضها البعض فإن عدد تلك العناصر يدل ضمنيا على عدد الخانات المتاحة كذلك فإذا طلب منا أن نحسب الاحتمالات الممكنة لترتيب سبع سيارات في مكان ما فإن هذا يعني بأن لدينا سبع أماكن فقط لترتيب تلك السيارات و علينا أن نبني كل احتمالاتنا على وجود سبعة مواضع فقط لإيقاف السيارات فنقول بأن الاحتمالات المتوفرة هي:
1×2×3×4×5×6×7=5040
لدينا 5040 احتمالا لترتيب تلك السيارات السبعة.
و لكنه إن طلب مني أن أرتب تلك الأشياء في 12 موضعا , أي في حال كان عدد الخانات أو المواضع أكبر من عدد العناصر فإنني أضرب عدد الاحتمالات الممكنة لدي في عدد الخانات فأقول:
5040×12=60480

## المزيد حول حساب الاحتمالات

ما هي الاحتمالات المتوفرة أمامنا لترتيب عنصرين بالنسبة لبعضهما البعض؟

لنفترض بأن لدينا عددين مثلا هما 5 و 7 . كيف يمكن أن نرتب هذين العددين مع بعضهما البعض؟

إن لدينا احتمالين فقط فإما أن نحصل على 75 أو 57.

الآن ماذا لو كانت لدينا خمسة عناصر . ما هي عدد الاحتمالات المتاحة أمامنا لترتيب هذه العناصر الخمسة بالنسبة لبعضها البعض؟

إن طريقة حساب عدد الاحتمالات المتاحة أمامنا تتمثل في ضرب عدد هذه العناصر مع بعضها البعض , فإذا كان لدينا خمسة عناصر فإننا نكتب :

$$1\times2\times3\times4\times5=120$$

إذا فإن هنالك أمامنا 120 احتمال permutations لترتيب هذه العناصر الخمسة بالنسبة إلى بعضها البعض.

ما هو عدد الاحتمالات المتوفرة أمامنا لترتيب خمس سيارات بقرب بعضها البعض في معرض سيارات :

الحل :

$$1\times2\times3\times4\times5=120$$

لدينا خمسة عناصر نضربها ببعضها البعض بالطريقة السابقة فنحصل على 120 احتمال و هي الاحتمالات المتوفرة أمامنا لترتيب السيارات الخمسة في معرض السيارات .

ما هو عدد الاحتمالات المتوفرة أمامنا حتى نقوم بترتيب 9 عناصر إلى جانب بعضها البعض :

لدينا 9 عناصر نقوم بضرب عواملها ببعضها البعض فنكتب :

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9=362880$$

إذا يتوفر لدبنا 362880 احتمال لترتيب 9 عناصر .

كما تلاحظون فإن حساب الاحتمالات يستدعي منا أن نضرب العوامل ببعضها البعض فإذا قيل لنا بأنه يتوجب علينا مثلا حساب احتمالات ترتيب

ثمانية طائرات بجوار بعضها البعض على سطح حاملة طائرات فإننا نقول :

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=40320$$

إذا فإن لدينا 40320 احتمال لترتيب ثمانية طائرات على سطح حاملة طائرات.

و لكن ماذا لو طلب منا أن نحسب احتمالات ترتيب عناصر عددها كبير 70 سيارة في موقف سيارات أو 80 طائرة في مطار أو ألف زورق,

هل سنجري عملية الحساب بالطريقة اليدوية ذاتها ؟

**هنالك طريقة تمكننا حساب الاحتمالات بكبسة زر واحدة وذلك باستخدام الزر n! في الآلة الحاسبة :**

**فإذا أردنا أن نحسب عدد الاحتمالات المتاحة أمامنا لترتيب ثمانية عناصر و بدلا من استخدام الطريقة اليدوية :**

$$\mathbf{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=40320}$$

**فإننا ببساطة شديدة نضغط الزر 8 أو أي عدد نريد أن نحسب احتمالاته ثم نضغط زر حساب العوامل**

**n! فنحصل على النتيجة بضغطة واحدة .**

n!

و بـهـذ ه الـطـريـقـة نـتـمـكـن من حسا ب الاحتما لات الـمـتـوفـر ة أما منا لـتـرتـيـب أعدا د كـبـيـر ة من الـعـنـا صر .

نـسـتـخـد م الـزر n! : الـذ ي يـتـألـف من حرف n و علامـة تـعـجـب ! لـحـسا ب عوا مل أي عدد و حسا ب الاحتما لات.

هل نـسـتـطـيـع حسا ب عا مل عدد ما إ ذ ا عـلـمـنـا عا مل الـعـد د الـسا بـق لـه ؟

حسـبـنـا سا بـقـا عا مل الـعـد د 8

8 n! = 40320

كـيـف احسب عا مل الـعـد د 9 إ ذ ا عرفت عا مل الـعـد د 8 ؟

بـبـسا طة فـإ نـنـا إ ذ ا ضربـت الـعـد د 9 بـعـا مل الـعـد د 8 أي 40320 فـإ نـنـي أحصل بـذ لـك عـلـى عا مل الـعـد د 9 :

9!n =9×8 !n

40320×9=362880

إ ذ ا يـمـكـنـنـا أن نـحـصل عـلـى عا مل أي رقـم بـضـرب ذ لـك الـرقـم بـعـا مل الـرقـم الـسا بـق لـه .

مـثـا ل عا مل الـعـد د 8 يـسا و ي الـعـد د 8 ضرب عا مل الـعـد د 7 .

و بالتالي فإن القاعدة تقول :

$n! = n \times (n-1)!$

إن عامل أي عدد يساوي ذلك العدد مضروبا بعامل العدد السابق له .

n! عامل عدد ما

N العدد

(n-1) العدد السابق له

(n-1)! عامل العدد السابق له .

ما هو عدد الاحتمالات المتاحة أمام 6 سيارات حتى تصطف في 3 مواقف ؟

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6!}{6!-3!}$$

6!/3!=6!/6!-3!=

1×2×3×4×5×6−1×2×3=4×5×6=120

120=1×2×3=4×5×6=120نـاقص1×2×3×4×5×6

إذا فإن هنالك 120 احتمال لصف 6 سيارات في ثلاثة مواقف.

إذا كان عدد الخانات التي يتوجب صف العناصر فيها أقل من عدد العناصر التي يتوجب صفها فإن عدد الاحتمالات المتاحة يساوي عامل العناصر ناقص عامل الخانات .

في المثال السابق عدد العناصر 6 أي ست سيارات أما عدد الخانات فهو ثلاثة أي ثلاثة مواقف.

عامل العناصر $1\times2\times3\times4\times5\times6$

عامل الخانات $1\times2\times3$

عامل العناصر ناقص عامل الخانات يساوي $4\times5\times6$

يساوي 120 هو عدد احتمالات صف 6 عناصر في ثلاثة خانات.

الآن : ماذا لو كانت لدينا مثلا 10 سيارات نريد ترتيبها في 5 مواقف - كم يكون عدد الاحتمالات المتوفرة أمامنا ؟

لحل هذه المسألة فإننا نستخدم المعادلة التالية :

**عدد العناصر المتوفرة على عدد المواقع ناقص عدد العناصر :**

**لدينا 10 سيارات و لدينا 5 مواقع فنقول:**

**عدد العناصر المتوفرة 10 ناقص عدد المواقع أي 5 .**

**5=5−10**

**الأن نقوم بعملية الضرب كالآتي:**

**$6\times7\times8\times9\times10=30240$**

**إذا فإن لدينا 30240 احتمالا لترتيب عشرة عناصر في خمسة مواقع.**

نبدأ عملية الضرب من العدد الذي يلي العدد الذي حصلنا عليه نتيجة طرح عدد المواقع من عدد العناصر.

ماذا لو كان لدينا 15 عنصر و 5 مواقع؟

نقول عندها 15 ناقص 5 يساوي 10 - نتابع عملية الضرب بعد العدد عشرة أي أننا نتابع عملية ضرب العوامل ابتداء من العدد الذي يلي ناتج عملية الضرب و هو هنا العدد 11 فنكتب:

$11\times12\times13\times14\times15=360360$

إذا فإن لدينا 360360 احتمالا لترتيب 15 عنصر في خمسة مواقع.

ماذا لو كان لدينا 18 عنصر و 6 مواقع؟

عندها نقول 18 ناقص 6 يساوي 12.

$18-6=12$

نتابع عملية الضرب ابتداءا من العدد 13 أي ابتداء من العدد الذي يلي ناتج عملية الطرح:

ناتج عملية الطرح هو العدد 12

العدد الذي يلي ناتج عملية الطرح هو العدد 13.

$13\times14\times15\times16\times17\times18=13366080$

إذا فإن لدينا 13366080 احتمالا لترتيب 6 عناصر في 18 موقع.

يتيح لنا جهاز الاستقبال الفضائي قفل أي قناة برقم مؤلف من أربعة خانات و في كل خانة لدينا 10 خيارات حيث يمكننا أن نملأ أي خانة من تلك الخانات بعدد يتراوح مابين صفر و تسعة :

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

ما هو عدد الاحتمالات المتوفرة أمامنا لتشكيل كلمة سر بهذه الطريقة , و كم هو عدد المحاولات التي يجب أن يقوم بها شخص ما حتى يكتشف كلمة السر تلك؟

لحل هذه المسألة نكتب :

$10\times10\times10\times10=10^4=10000$

لدينا عشرة آلاف احتمال أي عشرة مرفوعة للقوة الرابعة $10^4$ .

لماذا استخدمنا في المثال السابق العدد عشرة , أي لماذا ضربنا العدد عشرة بنفسه ؟

لأنه في كل خانة لدينا 10 خيارات تتراوح ما بين صفر و تسعة .

لماذا ضربنا العدد عشرة بنفسه 4 مرات؟

لأن جهاز المستقبل الفضائي (الريسيفر ) يتيح لنا استخدام كلمة سر مؤلفة من أربع خانات فقط.

من المسألة السابقة نستنتج بأنه كلما كانت كلمة السر أطول توجب على من يحاول اكتشافها القيام بعدد أكبر من المحاولات لأن الاحتمالات تكون أكبر و كذلك فإن إضافة الأحرف و الرموز إلى كلمة السر يقلل من فرصة اكتشافها .

مثال :

ما هو عدد الاحتمالات المتوفرة أمامي لتشكيل كلمة سر مؤلفة من 6 خانات إذا سمح لي بأن استخدم كلا من الحروف الإنكليزية و الأرقام لتشكيل كلمة السر تلك؟

لدي عشرة أعداد يمكن استخدامها في كل خانة و هي الأعداد من صفر إلى 9 , كما أن لدي 26 حرفا يمكنني استخدامها في كل خانة و هي بالطبع أحرف اللغة الإنكليزية فأقول :

$$26+10=36$$

إذا فإن لدي 36 عنصر يمكن لي أن استخدمها في كل خانة من الخانات .

لدي 6 خانات , أي أن بإمكاني أن استخدم 36 حرفا و عددا حتى أشكل كلمة سر مؤلفة من 6 خانات و لذلك تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$36\times36\times36\times36\times36\times36=2176782336$$

$$36^6$$

إذا فإن لدي 2176782336 احتمال لتشكيل كلمة سر بتلك الطريقة.

---

**نرمز لمعامل التكرار المستخدم في حساب الاحتمالات بإشارة التعجب ! .**

**عندما تجد هذه الصيغة مثلا !8 فإن ذلك يعني :**

**$8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$**

**و عندما نجد الصيغة !6 فإن ذلك يعني :**

**$1\times2\times3\times4\times5\times6=$**

**$6!$**

ما هي عدد الاحتمالات المتوفرة لدي لتشكيل كلمة سر من أحرف عربية في برنامج يتيح لي تشكيل كلمة سر مؤلفة من 7 خانات ؟

عدد أحرف اللغة العربية 28 حرفا -إذا فإن الاحتمالات تساوي :

28 وهو عدد أحرف اللغة العربية مضروبة بنفسها سبع مرات وهو عدد الخانات أو عدد الأحرف التي يتيح لنا ذلك البرنامج استخدامها لتشكيل كلمة السر.

$28^7 = 28\times28\times28\times28\times28\times28\times28 = 13492928512$

28 مضروبة بنفسها 7 مرات أي 28 مرفوعة للقوة الثانية تساوي 13492928512.

إذا وضعت بيت الشعر التالي ككلمة سر :

و أول خبث الماء خبث ترابه و أول خبث المرء خبث المناكح

ما هو عدد الاحتمالات التي يتوجب على من يحاول كشف كلمة السر هذه أن يقوم بها حتى يصل إلى اكتشاف كلمة السر؟

أولا نعد خانات بيت الشعر أي نقوم بعد أحرف بيت الشعر مع ضرورة الانتباه إلى اعتبار كل فراغ بين كلمتين space أي كل نقرة مسطرة بين كلمتين بمثابة حرف كذلك فنحصل على الآتي:

عدد الأحرف في بيت الشعر هذا مع الفراغات بين الكلمات يبلغ 50 حرفا أو خمسين خانة .

عدد الاحتمالات التي يتوجب إدخالها في كل خانة هو 28 حرفا هي بالطبع أحرف اللغة العربية زائد نقرة الفراغ space يساوي 29 زائد الألف التي فوقها همزة أ و الهمزة المنفردة ء فيصبح لدينا 31

احتمال لكل خانة و لدينا 50 خانة فنقول بأن عدد الاحتمالات يساوي العدد 31 مضروبا بنفسه 50 مرة أي 31 مرفوعا للقوة 50 :

$31 \wedge 50 = 31^{50}$

النتيجة التي سنحصل عليها هي نتيجة فلكية .

علينا الانتباه عند حساب الاحتمالات إلى مسألة هامة وهي : هل الخانة المتاحة سيشغلها عنصر واحد معروف أم أنه من الممكن أن يشغلها أكثر من عنصر؟

و على سبيل المثال إذا طلب مني أن أحسب احتمالات ملئ 4 خانات بالسيارات أو الأشخاص أو الكرات

فإنني ببساطة أحسب عوامل العدد 4 بالشكل الذي تعلمناه سابقا :

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

أو أني أحسبها على الآلة الحاسبة بالشكل التالي :

$n! = 24$

أضغط العدد 4 ثم أضغط زر حساب العوامل n! :

إذا لدي 24 احتمال لصف 24 عنصرا بطرق مختلفة .

و لكن إذا طلب مني أن أحسب عدد الاحتمالات المتاحة لإقفال جهاز استقبال بث فضائي ( ريسيفر ) بكلمة سر تتألف من 4 خانات بحيث استخدم الأعداد من الصفر حتى 9 في كل خانة فإن حساب الاحتمالات سيختلف عندها .

فإذا قلت بأن عدد الاحتمالات يساوي :

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$n! = 24$

فإني أكون قد ارتكبت بذلك خطأ قاتلا لأن جهاز استقبال القنوات الفضائية عندما يتيح لي أن أقفل قناة ما برقم سري مؤلف من أربع خانات فإن بإمكاني أن أضع في كل خانة عددا

يتراوح ما بين صفر و 9 فإن ذلك يعني بأن لدي في كل خانة عشر احتمالات ولذلك فإن حساب الاحتمالات سيتم على الشكل التالي :

$10\times10\times10\times10=10\wedge4=10^{4}=10000$

و هذا صحيح لأن الاحتمالات المتوفرة أمامي لأقفال قناة ما بكلمة سر تتراوح ما بين العدد صفر

0000 و الرقم 9999 , أي أن لدي 9999 احتمال .

10 مرفوعة للقوة الرابعة

عدد الاحتمالات المتاحة في كل خانة وهي هنا 10 احتمالات مرفوعة إلى عدد الخانات المتوفرة وهي هنا 4 خانات .

وبذلك نكون قد أنهينا بحث حساب الاحتمالات.

# المجموعات و العناصر Sets and Elements

# نظرية المجموعات set theory

المجموعة هي ببساطة الإطار الذي يضم داخله عناصر تنتمي إليه فلأسرة هي مجموعة و أفراد الأسرة هم عناصر في تلك الأسرة و غرفة الصف مجموعة و التلاميذ داخلها هم عناصر في تلك المجموعة و النادي الرياضي مجموعة و اللاعبين الذين

يلعبون لصالح ذلك النادي هم عناصر في تلك المجموعة و وكالة السيارات مجموعة و السيارات الموجودة في تلك الوكالة هي عناصر و المدجنة مجموعة بينما الدجاج الموجودة فيها عناصر و هكذا يمكننا أن نسرد آلاف الأمثلة عن المجموعات و العناصر.
نرمز عادة للمجموعات بأحرف إنكليزية كبيرة بينما نرمز للعناصر التي توجد ضمن تلك المجموعات بأحرف إنكليزية صغيرة.
عندما ينتمي عنصر ما لمجموعة معينة فإننا نرمز لهذا الانتماء بالرمز. ∈
و نستخدم هذا الرمز للدلالة على أن عنصرا ما ينتمي إلى مجموعة ما :
$a \in M$
العنصر a ينتمي إلى المجموعة. M
سامر∋مدرسة خالد بن الوليد
سامر ينتمي إلى مدرسة خالد بن الوليد.
و نعبر عن نفي الانتماء بالرمز∉
$a \notin M$
العنصر a لا ينتمي للمجموعة. M
محمد ∌ مدرسة خالد بن الوليد
محمد لا ينتمي لمدرسة خالد بن الوليد.
■لا تتغير ماهية المجموعة إذا تغير ترتيب عناصرها أو إذا تكرر أحد عناصرها.
مثال , لدينا المجموعات التالية:
$A=(q,w,e)$
$B=(w,q,e)$
$C=(e,q,w)$
$D=(e,e,q,q,w,w)$
$A=B=C=D$
جميع المجموعات السابقة هي مجموعات متساوية ذلك أن تكرار العناصر أو تغير ترتيبها داخل المجموعة لا يؤثر على ماهية المجموعة.

**مبدأ الامتداد the principle of extension في علم المجموعات:**

و فقا لهذا المبدأ فإن أي مجموعة يتم تحديدها و تعريفها بناء على العناصر التي تحتويها تلك المجموعة و لذلك فإننا نعتبر أي مجموعتين بأنهما متساويتين إذا احتوتا على ذات العناصر.

التعبير عن المجموعة:
رأينا سابقا بأن كل مجموعة تتحدد ماهيتها من خلال عناصرها المكونة و بالتالي فإننا نعرف أي مجموعة و نعبر عنها من خلال سرد العناصر الداخلة في تركيبها.
فنقول بأن المجموعة A مثلا هي:
A=(1,2,3,4,5)
عرفنا المجموعة A عن طريق سرد العناصر المكونة لها وهي هنا الأعداد 1,2,3,4,5
و وضعنا عناصر المجموعة بين قوسين و فصلناها عن بعضها بواسطة فواصل.
ومن الممكن كذلك ان نعرف المجموعة من خلال ذكر خصائص عناصر تلك المجموعة فنقول مثلا في تعريف مجموعة تحوي عددا سلبيا و لتكن المجموعة N مثلا بأنها:

N=(x:x negative number,x<0)

و تقرأ هذه الصيغة على الشكل التالي:
إن المجموعة N هي المجموعة التي تحوي العنصر x على اعتبار أن x هو عدد سلبي أصغر من الصفر.
لاحظ أننا وضعنا محتويات المجموعة بين قوسين.
النقطتين : تعنيان (حيث أو على اعتبار أن. )
negative numberعدد سلبي (أصغر من الصفر)
0>أصغر من الصفر.
الفاصلة , تعني حرف العطف الواو

و هذا يعني بأن المجموعة N تضم جميع الأعداد السلبية.

مثال آخر:
C=(x:x is a letter in the English alphabet,x is a consonant)
إن المجموعة C هي المجموعة التي تحوي العنصر x حيث أن العنصر x هو حرف من حروف الأبجدية الإنكليزية كما أن العنصر x هو حرف ساكن.
Eاسم المجموعة ( حرف كبير)
:حيث أن - على اعتبار أن
,الفاصلة : تعني (و)
و هذا يعني بأن المجموعة E تضم جميع الأحرف الإنكليزية الساكنة:
E=( b,c,d,e,f,g,q,r,t,p,s,,k…..)
و هذا يعني بأن هذه المجموعة لا تتضمن الأحرف الصوتية:

A,e,o….

vowels∉C

الأحرف الصوتية لا تنتمي إلى المجموعة . C

■المجموعة الشاملة : universal set

في كل مجال من المجال فإن جميع العناصر التي يختص ذلك المجال بالتعامل معها تنتمي إلى مجموعة كبرى تدعى بالمجموعة الشاملة the universal set فعلى سبيل المثال فإن مجموعة تلاميذ العالم هي مجموعة شاملة تضم جميع تلاميذ العالم و مجموعة الأحرف هي مجموعة شاملة تضم جميع أبجديات العالم و مجموعة الأعداد هي مجموعة شاملة تضم جميع الأعداد سواء أكانت موجبة أو سالبة فردية أو زوجية و مجموعة السيارات تضم جميع أنواع و أصناف السيارات و هكذا.

أحيانا يرمز للمجموعات الشاملة بالحرف. U

■المجموعة الخالية - المجموعة المنعدمة العناصر Empty set - null set :

المجموعة الخالية هي مجموعة منعدمة العناصر أي انها لا تحوي أي عنصر و يرمز لهذه المجموعة بالرمز. Ø

و فقا لنظرية المجموعات فإن هنالك مجموعة خالية وحيدة مهما تغيرت أسماؤها و بالتالي فإن جميع المجموعات الخالية متساوية لأنها لا تحوي أية عناصر كما أن جميع المجموعات الخالية هي في النهاية مجموعة واحدة عديمة العناصر.

■المجموعة الجزئية : subset

تعرف المجموعة الجزئية في الحياة بأنها مجموعة تشكل جزءا من مجموعة أخرى أكبر منها.

إن العلاقة ما بين مجموعة ما و مجموعة جزئية منها تعرف بأنها علاقة تضمن. inclusion

و في علم المجموعات إذا كان لدينا المجموعتين A و B و كانت عناصر المجموعةA موجودة كذلك ضمن المجموعة B فإننا ندعوا المجموعة A بأنها مجموعة جزئية من المجموعة. B

مثال:

لنفترض بأن لدينا المجموعة ش و تحوي أشهر السنة الهجرية:

ش = ( محرم , صفر, ربيع الأول, ربيع الآخر , جمادى الأولى , جمادى الآخر, رجب , شعبان, رمضان , شوال, ذو القعدة , ذو الحجة (

و انه كانت لدينا المجموعة ح و تحوي الأشهر الحرم:

ح = ( محرم , رجب, ذو القعدة , ذو الحجة (

فهذا يعني بأن المجموعة ح أي مجموعة الأشهر الحرم هي مجموعة جزئية من المجموعة ش و هي مجموعة اشهر السنة الهجرية ذلك أن جميع أشهر المجموعة ح أو مجموعة الأشهر

الحرم هي موجودة كذلك في المجموعة ش و هي مجموعة أشهر السنة الهجرية.
لنفترض بأنه كان لدينا المجموعة ي و لتكن مجموعة أيام الأسبوع:
ي = ( سبت , أحد , اثنين, ثلاثاء, أربعاء, خميس, جمعة (
و لتكن لدينا المجموعة ع وهي مجموعة أيام العطلة:
ع= ( الجمعة , السبت(
نلاحظ بأن جميع عناصر المجموعة ع أي مجموعة أيام العطلة موجودة كذلك في المجموعة ي وهي مجموعة أيام الأسبوع وهذا يعني بأن المجموعة ع أي مجموعة أيام العطلة هي مجموعة جزئية من مجموعة أيام الأسبوع أي أننا لو أحطنا عنصري أيام العطلة بدائرة فإننا سنحصل على مجموعة جزئية داخل المجموعة الأم.
ارسم دائرة واكتب داخلها أسماء أيام الأسبوع فتحصل بذلك على مجموعة أيام الأسبوع - الآن أحط يومي العطلة بدائرة فتحصل على مجموعة صغرى داخل مجموعة أيام الأسبوع وهي المجموعة الجزئية.
ارسم دائرة اكتب داخلها اسماء الأشهر الهجرية فتحصل على مجموعة أشهر السنة الهجرية - أحط الأشهر الحرم بدائرة فتحصل على دائرة صغرى داخل دائرة أشهر السنة الهجرية وهذه الدائرة الصغرى تمثل مجموعة جزئية.
اكتشف المزيد من المجموعات الجزئية من حولك.
يرمز للمجموعة الجزئية بهذا الرمز. ⊂
يرمز للمجموعة الكبرى superset بهذا الرمز. ⊃
فإذا صادفتنا عبارة تقول:
$A \subset B$
فهي عبارة تعني بان المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة B وانها محتواة في تلك المجموعة.
و إذا صافتنا عبارة:
$B \supset A$
فإنها تعني بأن المجموعة B هي مجموعة أم للمجموعة A و أن المجموعة B تحوي المجموعة. A

تحدثنا سابقا عن الحالة التي يكون لدينا فيها مجموعة كبرى ( مثل مجموعة أيام الأسبوع ) و مجموعة صغرى تكون موجودة ضمن تلك المجموعة الكبرى ( مجموعة أيام العطلة الأسبوعية. (
و لكن يمكن أن تكون لدينا مجموعتين تحويان العناصر ذاتها كما في المثال التالي:
س= ( نور , سامر , عمر )
ع= ( عمر , سامر, نور)

و كما مر معنا سابقا فإن ماهية كل مجموعة تتحدد وفقا لماهية العناصر التي تحتويها , بمعنى أن عناصر المجموعة هي التي تحدد ماهية تلك المجموعة , و بما أن كلا من المجموعتين السابقتين تحويان العناصر ذاتها بلا زيادة ولا نقصان , فإن هذا يعني ببساطة أن كلتا المجموعتين متساويتين.
و في الوقت ذاته فإننا نقول بأن كل مجموعة من هاتين المجموعتين هي مجموعة جزئية من المجموعة الثانية وذلك لأن عناصر كل من هاتين المجموعتين موجودة في المجموعة الأخرى.
إذا كان لدينا مجموعتين تحويان العناصر ذاتها فهذا يعني بأن هاتين المجموعتين متساويتين , و في الوقت ذاته فإن ذلك يعني بأن كلا من هاتين المجموعتين هي مجموعة جزئية من المجموعة الثانية لأن عناصر كلا منهما موجودة في المجموعة الأخرى.
و في هذا الشكل من أشكال العلاقة بين مجموعتين نستخدم الرمز ⊇ لدلالة على أن إحدى هاتين المجموعتين هي مجموعة جزئية من المجموعة الثانية و أنها تساويها في الوقت ذاته , كما نستخدم الرمز ⊆ للدلالة على أن إحدى هاتين المجموعتين هي مجموعة أم للمجموعة الثانية أي أنها تشمل المجموعة الثانية و في الوقت ذاته فإنها تساويها .
س= ( نور , سامر , عمر )
ع= ( عمر , سامر, نور)
س=ع
س⊇ع : المجموعة س تساوي المجموعة ع كما انها مجموعة جزئية منها .
ع⊇س : المجموعة ع تساوي المجموعة ع كما أنها مجموعة أم تضم المجموعة س في الوقت ذاته .

كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها .
$B \subseteq B$
المجموعة B تساوي نفسها كما أنها مجموعة جزئية من نفسها لأننا إذا تصورنا بأن هنالك نسخة طبق الأصل منها فإنها بالطبع ستكون مساوية لها و ستحوي العناصر ذاتها و بالتالي فإنها ستكون مجموعة جزئية منها .
المجموعة الخالية φ هي مجموعة جزئية من كل مجموعة : يعتبر الرياضيين بأن العدم موجود في كل شيء و بالتالي فإنه جزء من كل شيء.
■كل مجموعة هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة : U على سبيل المثال فإن مجموعة سيارات المرسيدس هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة التي تضم جميع أصناف السيارات و مجموعة حيوانات المزرعة هي مجموعة جزئية من المجموعة

الشاملة التي تضم جميع حيوانات العالم .
إذا طلب منا أن نذكر المجموعات الجزئية التي تضمها مجموعة ما فإننا دائما نذكر المجموعة الخالية ( لأن المجموعة الخالية هي جزء من كل مجموعة ) ثم نذكر اسم المجموعة ذاتها ( لأن كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها ) , ثم نذكر بقية المجموعات الجزئية التي تضمها تلك المجموعة .
المجموعة A تساوي المجموعة B في حال كانت المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B و في حال كانت المجموعة B كذلك مجموعة جزئية من المجموعة A في الوقت ذاته , و بالتالي تتحقق لدينا فكرة أن هاتين المجموعتين متساويتين , كما أن كلا منهما هي مجموعة جزئية من الأخرى:
A=Bفقط في حال كانت A⊇B : و كانت. A⊆ B
أي أن المجموعتين A و B هما مجموعتين متساويتين في حالة واحدة و هي أن تكون المجموعة الأولى مجموعة جزئية من المجموعة الثانية و أن تكون المجموعة الثانية مجموعة جزئية من المجموعة الأولى , أي أن تكون كلا من هاتين المجموعتين مجموعة جزئية من المجموعة الثانية .
العلاقة المتعدية و المجموعات:
نعني بالعلاقة المتعدية أن تقيس شيئا ثالثا بطريقة غير مباشرة بناء على علاقته بشيء ثاني تعرفه :
فإذا كان محمد بعمر سامر و كان سامر بعمر نور فهذا يعني بأن محمد بعمر نور و
إذا كان A صديق لعدوك B الذي يظهر العداوة لك بشكل صريح فهذا يعني بأن A هو عدو لك كذلك و إن لم يظهر لك العداوة بشكل صريح.
فإذا كان هنالك الطرف A الذي يدعي صداقتك بينما هو صديق لعدوك B فهذا يعني ← بأن A الذي يدعي صداقتك ليس إلا عدو لك.
و إذا عرفنا بأن A مثلا هي مجموعة جزئية من المجموعة B و أن المجموعة B هي بدورها مجموعة جزئية من المجموعة C فهذا يعني بأن المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة . C
فإذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة : B
A⊆ B
و إذا كانت B مجموعة جزئية من المجموعة : C
B⊆ C
فهذا يعني بأن المجموعة A هي كذلك مجموعة جزئية من المجموعة : C
A⊆ C

لا تتحقق المساوة بين مجموعتين إلا إذا كانت كل منهما مجموعة جزئية من الأخرى و لذلك نقول بأن المجموعة A تساوي المجموعة : A=B فقط في حال كانت هنالك علاقة تبادلية بين هاتين المجموعتين أي في حال كانت المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة : B

$A \subseteq B$

و في حال كانت B كذلك مجموعة جزئية من المجموعة A

$B \subseteq A$

مثال عملي:

لدينا المجموعة س التي تحوي العناصر:

س= ( سامر , نور, عمر , مجد , محمد ) و لددينا المجموعة ع التي تحوي العناصر:

ع= (سامر , نور, عمر, مجد , محمد )

إن كلا من هاتين المجموعتين هي مجموعة جزئية من المجموعة الأخرى فالمجموعة س هي مجموعة جزئية من المجموعة ع و كذلك فإن المجموعة ع هي مجموعة جزئية من المجموعة س , لماذا ؟ لأنهما تحويان العناصر ذاتها .

إن المجموعتين س و ع هما مجموعتين متساويتين , لماذا ؟ لأن كلا منهما مجموعة جزئية من المجموعة الأخرى.

■الآن ماذا لو كانت المجموعة الأولى مجموعة جزئية من المجموعة الثانية و لكن لم تكن المجموعة الثانية مجموعة جزئية من المجموعة الأولى:

ماذا لو كانت المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة. B

$A \subseteq B$

و لكن المجموعة B لم تكن مجموعة جزئية من المجموعة: A

$B \nsubseteq A$

في حال كانت إحدى المجموعتين فقط مجموعة جزئية من المجموعة الثانية بينما لم تكن المجموعة الثانية مجموعة جزئية من المجموعة الأولى فهذا يعني بأن هاتين المجموعتين ليستا مجموعتين متساويتين و عندها نقول بأن المجموعة A هي مجموعة جزئية حقيقية Proper subset من المجموعة , B و نعبر عن هذه العلاقة بالشكل التالي:

$A \subset B$

إن الرمز ⊇ يتضمن معنى ان تكون مجموعة جزئية من مجموعة ما و يتضمن معنى المساواة كذلك بمعنى أنه يعني أن كلا من المجموعتين هما مجموعتين جزئيتين من بعضهما البعض لأنهما تتضمنان العناصر ذاتها , أما الرمز ⊃ فيحمل معنى أن إحدى المجموعتين فقط هي مجموعة جزئية من المجموعة الثانية بينما المجموعة الثانية هي مجموعة أم تتضمن المجموعة الأولى , أي أنهما ليستا مجموعتين متساويتين لأن إحداهما

مجموعة كبرى بينما الثانية مجموعة صغرى.
مثال توضيحي:
المجموعة ح تتضمن عددا من الحيوانات اللاحمة:
ح = ( قطة , كلب, فهد, نمر , ذئب, ثعلب, ضبع )
المجموعة م تتضمن الحيوانات الأليفة اللاحمة:
م= ( قطة , كلب)
في المثال السابق المجموعة (م ) أي مجموعة الحيوانات الأليفة اللاحمة هي مجموعة جزئية من المجموعة (ح) أي مجموعة الحيوانات اللاحمة , و لكن المجموعة ح ليست مجموعة جزئية من المجموعة م و سبب ذلك أن المجموعتين ليستا مجموعتين متساويتين ذلك أنهما لا تحويان العدد ذاته من العناصر ولذلك نقول بأن المجموعة م هي مجموعة جزئية حقيقية من المجموعة ح:
م ⊂ح

مخطط فن: Venn diagram -
ينسب مخطط فن إلى الإنكليزي جون فن 1834-1923 John Venn
يستخدم مخطط فن في فرع الرياضيات الذي يعرف بنظرية المجموعات set theory و ذلك لإظهار العلاقة بين المجموعات و العناصر - يتم تمثيل مخطط فن على شكل دوائر تتوضع بعضها ضمن الدوائر الأخرى لتمثيل المجموعات الجزئية التي تتوضع داخل مجموعات أم حيث تمثل الدائرة الكبيرة المجموعة الأم بينما تمثل الدائرة الصغيرة التي تتوضع داخل الدائرة الكبيرة المجموعة الجزئية - مثال:
يمكننا أن نصور مثال الحيوانات اللاحمة و الحيوانات اللاحمة الأليفة وفق مخطط فن بأن نرسم دائرة كبيرة نكتب داخلها أسماء الحيوانات اللاحمة ثم نحيط اسماء الحيوانات اللاحمة الأليفة (القطة و الكلب) بدائرة صغيرة فنحصل بذلك على دائرة صغيرة تمثل المجموعة الجزئية تقع ضمن الدائرة الكبيرة التي تمثل الحيوانات اللاحمة.
كما يتم تصوير علاقة المجموعات ببعضها البعض وفق مخطط فن على شكل دائرتين أو أكثر متداخلتين بشكل جزئي ( كما تتداخل الدوائر التي ترمز للألعاب الأولمبية ) حيث تمثل وتحوي الأجزاء المتداخلة العناصر المشتركة بين المجموعات المختلفة.
فإذا كان سامر و عمر تلميذين في الصف و كانا كذلك لاعبين في فريق رياضي فإن العنصرين المشتركين بين مجموعة تلاميذ الصف و بين مجموعة لاعبي الفريق الرياضي هما سامر و عمر و بالتالي إذا مثلنا ذلك الأمر و فق مخطط فن فإننا نرسم دائرتين متداخلتين الأولى نكتب فيها أسماء تلاميذ الصف

بينما نكتب في الثانية أسماء لاعبي الفريق الرياضي و داخل القطاع المشترك intersection بين هاتين الدائرتين نكتب اسمي سامر و عمر.
يتم تمثيل المجموعة الكونية (المجموعة الشاملة ( universal setوفق مخطط فن على شكل مستطيل.
Venn diagram
اتحاد مجموعتين: The union of two sets
اتحاد مجموعتين هو مجموعة جديدة تحوي جميع العناصر التي تنتمي إلى واحدة من المجموعتين المتحدتين على الأقل.
يرمز لاتحاد مجموعتين بالرمز: U
A U B
المجموعة A اتحاد المجموعة. B
تقاطع مجموعتين The intersection of two sets هو مجموعة جديدة تحوي جميع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين.
يرمز لتقاطع مجموعتين بالرمز. ∩
A ∩B
Aتقاطع B
ما يعبر أحيانا عن التقاطع بعبارة:
A and B
Aو B

مثال توضيحي:
لتكن لدينا المجموعتين A و. B
A=(1,2,3,4)
B=(4,5,6,7,8)
ما هو تقاطع هاتين المجموعتين مع بعضهما البعض؟
أي ما هو العنصر المشترك أو ما هي العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين ؟
بالطبع فإن العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين هو العدد 4 و لذلك نقول بأن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B يعطينا مجموعة ثالثة هي المجموعة AB وهذه المجموعة تحوي العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين.
A∩B⟶ AB=(4)
في علم المجموعات لا يذكر العنصر الواحد إلا مرة واحدة فقط , مع أن العدد 4 موجود في كلا المجموعتين فإننا ذكرناه مرة واحدة.
الان ما هي نتيجة اجتماع أو اتحاد هاتين المجموعتين مع بعضهما البعض ؟
إنها مجموعة جديدة تحوي جميع العناصر الموجودة في كلتا هاتين المجموعتين.
AUB=(1,2,3,4,5,6,7,8)

اتحاد المجموعة A مع المجموعة B يعطينا مجموعة ثالثة تحوي جميع العناصر الموجودة في كلتا هاتين المجموعتين.

مثال توضيحي:
لتكن لدينا المجموعة ص التي تحوي تلاميذ الصف:
ص= ( سامر, نور, عمر, مجد , محمد , طارق, خالد , يوسف )
و لتكن لدينا المجموعة ر التي تحوي الفريق الرياضي للمدرسة :
ر = ( سامر , نور , عبيدة, يزن , أسامة )
ما هو تقاطع المجموعة ص مع المجموعة ر ؟
إنه العناصر المشتركة بين المجموعتين أي سامر و نور فنقول:
ص ∩ ر = (ص ر ) = ( سامر , نور)
تقاطع المجموعة ص مع المجموعة ر يعطينا المجموعة المشتركة (ص ر ) و التي تتألف من العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين أي سامر و نور.
ما هي نتيجة اتحاد المجموعتين ص و ر مع بعضهما البعض ؟
إن نتيجة اتحاد هاتين المجموعتين هو مجموعة ثالثة تحوي جميع عناصر هاتين المجموعتين.
ص Uر = ( سامر, نور, عمر, مجد , محمد , طارق, خالد , يوسف , عبيدة, يزن , أسامة )
تقاطع المجموعة ص مع المجموعة ر هو مجموع العناصر الموجودة في كلتا هاتين المجموعتين.
في علم المجموعات لا نكرر ذكر العنصر أكثر من مرة واحدة ومن الخطأ أن تكرر ذكر العنصر الواحد أكثر من مرة واحدة(
■إذا اختلط عليك الأمر في الامتحان ما بين رمز الاتحاد و رمز التقاطع تذكر دائما بأن رمز الاتحاد هو حرف U كبير و هو الحرف الأول من كلمة Union 6اتحاد.

رمز التقاطع Intersection هو حرف U مقلوب رأسا على عقب upside down ∩ .

الصيغة الرياضية لاتحاد مجموعتين:
AUB=(x:x ∈A or x∈B)
إن اتحاد المجموعتين A و B يساوي مجموعة العناصر X التي تحقق الشرط أنها تنتمي إلى المجموعة A أو انها تنتمي إلى المجموعة. B
أي أن ناتج اتحاد المجموعتين A و B مع بعضهما البعض هو مجموعة تضم عناصر x تحقق الشرط أنها إما أن تنتمي إلى المجموعة A أو أن تنتمي إلى المجموعة. B
مثال عملي:
عندما اتحدت المانيا الشرقية مع ألمانيا الغربية كان ناتج

ذلك الاتحاد مجموعة ( دولة ) يحقق عناصرها ) x مواطنوها (
شرط انهم إما أنهم كانوا ينتمون إلى ألمانيا الشرقية
(المجموعة الأولى) أو أنهم كانوا ينتمون إلى ألمانيا
الغربية (المجموعة الثانية) - أي أنك إذا نزلت إلى شوارع
ألمانيا بعد أن حققت الاتحاد بين شطريها فإنك ستجد سكانا
بعضهم شرقيين و بعضهم غربيين.

الصيغة الرياضية لتقاطع مجموعتين:
A∩B=(x:x∈A &x∈B)
إن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B يساوي أو ينتج
المجموعة التي تحوي العنصر مجموع العناصر x و التي تحقق
الشرط أنها تنتمي لكل من المجموعة A و المجموعة B على حد
سواء.
∈ينتمي
:بحيث أن - يحقق الشرط
&و AND
أي ان تقاطع مجموعتين هو المجموعة التي تحوي العناصر
المشتركة بين هاتين المجموعتين و العنصر الذي لا يحقق شرط
الانتماء لكلتا المجموعتين المتقاطعتين لا يمكن أن يكون ضمن
ناتج تقاطع تلك المجموعتين.
مثال عملي:
ما هو ناتج تقاطع أرمينية مع لبنان ؟
إن ناتج تقاطع أرمينية ( المجموعة الأولى ) مع لبنان
(المجموعة الثانية ) هي المجموعة التي تحوي العنصر أو
مجموع العناصر x و التي تحقق الشرط انها تنتمي لكل من
المجموعة الأولى ( أرمينية ) و المجموعة الثانية ( لبنان)
أي أن ناتج ذلك التقاطع هو الجالية الأرمنية في لبنان.
تذكر دائما أن تقاطع خطين هو النقطة المشتركة التي
يلتقي فيها هذين الخطين.
إذا كان ناتج تقاطع مجموعتين هو المجموعة الخالية بمعنى
انه إذا كان ناتج تقاطع مجموعتين هو الصفر أي أنه لم تكن
هنالك أية عناصر مشتركة بينهما فهذا يعني بأن هاتين
المجموعتين هما مجموعتين منفصلتين عن بعضهما البعض على
مخطط فن أي أننا إذا قمنا برسم مجموعتين لا توجد عناصر
مشتركة بينهما فإننا نقوم برسمهما على شكل دائرتين
بعيدتين عن بعضهما البعض و نعبر رياضيا عن المجموعتين
التين لا توجد عناصر مشتركة بينهما بالصيغة التالية:
A ∩B=Φ
رمز التقاطع∩
Φالمجموعة الخالية (العدم ) أو الصفر.

إذا كان:

$A\cup B=A\ ,A\cap B=A\longrightarrow A\subseteq B$

إذا كانت نتيجة اتحاد المجموعة A مع المجموعة B هي المجموعة A و إذا كان ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة Bهو المجموعة A فهذا يعني بأن المجموعة A هي مجموعة جزئية مساوية للمجموعة. B

مثال توضيحي:

A=(1,2,3)

B=(1,2,3)

AUB=(1,2,3)

إذا كانت المجموعة A تحوي العناصر (1,2,3) و كانت المجموعة B تحوي العناصر (1,2,3) فإن اتحاد المجموعتين A و B يعطي المجموعة. A

لماذا:

(1,2,3)+(1,2,3) =(1,2,3)

و ليس (1,1,2,2,3,3)

لأنه في علم المجموعات لا يجوز أبدا أن نكرر ذكر عنصر ما في مجموعة واحدة.

الآن إذا كان اتحاد المجموعة A مع المجموعة B هو المجموعة Aفهذا يعني بأن المجموعة B لا تحوي أي عنصر غير موجود في المجموعة , A بمعنى أنه إذا كانت المجموعة A تحوي العناصر ( مجد , نور ) و أجرينا اتحاد بينها و بين المجموعة B و كانت نتيجة ذلك الاتحاد (مجد , نور ) كذلك , أي المجموعة A ذاتها فهذا يعني بأن المجموعة B لا تحوي أي عنصر غير موجود في المجموعة , A فلو كانت المجموعة B تحوي العناصر ( مجد , نور , سامر ) لكانت نتيجة اتحادها مع المجموعة ( A مجد , نور , سامر ) أي لكان هنالك عنصر زائد وهو العنصر سامر و عندها لا يمكننا القول بأن اتحاد المجموعة A مع المجموعة Bيعطي المجموعة. A

و لكن من الممكن أن تكون المجموعة B أقل من المجموعة , A فلو كانت المجموعة B تحوي عنصرا واحدا هو العنصر نور لكانت نتيجة اتحادها مع المجموعة A مساوية للمجموعة: A

)مجد , نور ) + ( نور ) = ( مجد , نور (

لا يذكر أي عنصر إلا مرة واحدة في المجموعة فلا يجوز أن نقول ( مجد , نور , نور. (

النتيجة التي توصلنا إليها حتى الآن هي أنه من الممكن أن تكون المجموعة B مساوية للمجموعة A أو أصغر منها , ولكن لاستبعاد احتمال أن تكون المجموعة B أصغر من المجموعة A فقد ورد في الصيغة السابقة أن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B هو المجموعة. A

$A\cap B=A$

فلو كانت المجموعة B تحوي عنصرا واحدا هو العنصر مجد فقط

لما كانت نتيجة تقاطعها مع المجموعة A مساوية للمجموعة A :
)نور, مجد ) ∩ ( مجد ) = (مجد (
)نور , مجد ) تقاطع ( مجد ) = ( مجد ) , ذلك أن مجد هو العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين , و لكنه بما انه قال لنا بأن تقاطع المجموعتين A و B مع بعضهما البعض يساوي المجموعة A فهذا يعني بأن جميع عناصر المجموعتين هي عناصر مشتركة بينهما أي أن المجموعتين تحويان العناصر ذاتها .
)نور, مجد ) تقاطع ( نور, مجد ) = ( نور, مجد )
)نور, مجد ) ∩ ( نور , مجد ) = ( نور , مجد )
$A \cap B = A$
و هذا يعني في النهاية بأن المجموعة A مجموعة جزئية مساوية للمجموعة . B
$A \subseteq B$

ذكرت سابقا بأن كل مجموعة تنتمي إلى مجموعة شاملة تضم كل العناصر التي تتسم بذات صفات عناصر المجموعة , على سبيل المثال فإن مجموعة تلاميذ مدرسة معينة تنتمي إلى مجموعة شاملة تضم كل تلاميذ العالم و مجموعة الرياضيين في نادي رياضي معين تنتمي إلى مجموعة شاملة تضم كل رياضيي العالم و مجموعة الحيوانات في حديقة حيوانات معينة تنتمي إلى مجموعة شاملة تضم كل حيوانات العالم و مجموعة النباتات الموجودة في حديقة ما تنتمي في النهاية إلى مجموعة شاملة تضم كل نباتات العالم .

المتممات المطلقة : absolute complements
يرمز للمتمم المطلق بحرف A مرفوع للقوة c على الشكل التاليAc :
المتممات المطلقة للمجموعة الشاملة هي المجموعة الخالية :
$U'=\emptyset$
لماذا ؟ لأنه لا توجد أية عناصر خارج المجموعة الشاملة -كل العناصر تنتمي للمجموعة الشاملة .
ما هي المتممات المطلقة للمجموعة الغالية ؟
المتمم المطلق للمجموعة الخالية هو المجموعة الشاملة ؟
$\emptyset'=U$
لماذا ؟
لأن المجموعة الخالية لا تحوي أية عناصر و بالتالي فإن جميع العناصر تقع خارجها و تنقصها إذا أردنا أن نتمم المجموعة الخالية بحيث تضم داخلها جميع العناصر فهذا يعني بأنه يتوجب علينا أن نضم إليها جميع العناصر , و انتم تعلمون بأن جميع العناصر تنتمي إلى المجموعة الشاملة و بالتالي

فإن المجموعة الشاملة هي متمم المجموعة الخالية.
تصور لو كان هنالك شخصين أحدهما ثري يمتلك كل شيء بينما
الآخر فقير لا يمتلك أي شيء فإذا أردنا أن نعطي الشخص
الفقير (المجموعة الخالية) كل ما ينقصه فإن علينا أن
نعطيه ثروة الشخص الغني (المجموعة الشاملة) , و إذا بحثنا
عما ينقص الشخص الثري من ثروة (المجموعة الشاملة) فإننا
نجد بأنه لا ينقصه شيء , أي أن ما ينقصه هو اللا شيء أو
العدم أو المجموعة الخالية Ø (ما يمتلكه الشخص الفقير.)
في علم المجموعات فإن متمم المجموعة A هو جميع العناصر
التي لا توجد في المجموعة. A
إن المتمم المطلق للمجموعة A هو جميع العناصر الموجودة في
المجموعة الشاملة U و الغير موجودة في المجموعة. A

التعريف الرياضي للمتمم المطلق:
AC=(x:x ∈U ,x∉A)
إن المتمم المطلق للمجموعة Ac هو العنصر أو مجموع
العناصر x التي تحقق الشرط أنها تنتمي إلى المجموعة
الشاملة U وأنها لا تنتمي للمجموعة. A
: ACالمتمم المطلق للمجموعة. A
:بحيث ان , على اعتبار أن.
∉لا ينتمي.

المكمل المطلق لمجموعة ما هو العنصر أو مجموعة العناصر
التي تنتمي للمجموعة الشاملة و لا تنتمي لتلك المجموعة.
لنفترض بأنك تهوى جمع الطوابع البريدية أو أنك تهوى جمع
العملات القديمة و بالطبع ستكون لديك مجموعة طوابع بريدية
أو مجموعة عملات قديمة و يمكن أن ندعو مجموعتك تلك
بالمجموعة A مثلا و من الطبيعي أن تكون مجموعة الطوابع
التي تمتلكها أنت مجموعة ناقصة و محدودة - إن مجموعة
الطوابع أو مجموعة العملات القديمة الكاملة التي تضم جميع
طوابع العالم أو جميع عملات العالم القديمة تدعى بالمجموعة
الشاملة. U
ما هي كمية الطوابع أو العملات القديمة التي تحتاجها حتى
تكتمل مجموعتك من الطوابع أو العملات القديمة ؟
إنها بالطبع جميع الطوابع أو جميع العملات القديمة التي لا
تضمها مجموعتك.
كما أنها في الوقت ذاته الطوابع أو العملات التي تنتمي إلى
المجموعة الشاملة U التي تضم جميع الطوابع أو جميع العملات
القديمة.
و هذا يعني بأن ما تحتاجه لإكمال مجموعتك موجود في
المجموعة الشاملة U و غير موجود في مجموعتك , A و هذا

المقدار الناقص و الذي يكفي لإتمام النقص في مجموعتك هو ما يدعى بالمتمم المطلق للمجموعة . AC

المتمم النسبي The relative complement أو فرق مجموعتين:difference of sets
المتمم النسبي للمجموعة أو فرق المجموعتين A و B هو جميع العناصر الموجودة في المجموعة A و الغير موجودة في المجموعة . B
A−B
و ببساطة فإن المتمم النسبي هو الفرق بين مجموعتين أو أنه ببساطة أشد حاصل طرح مجموعة من المجموعة الأخرى.
يرمز للفرق بين مجموعتين بخط مائل. \
التعريف الرياضي للمتمم النسبي:
$A\backslash B=(x:x\in A,x\notin B)$
فرق \ المجموعتين A و B أو الفرق بين المجموعتين A و B أو A فرق B يساوي العنصر أو مجموعة العناصر x التي تحقق الشرط : أنها تنتمي للمجموعة A و أنها لا تنتمي للمجموعة B .
\فرق
بحيث , أو التي تحقق الشرط:
∈تنتمي
و,
∉لا تنتمي.
المتمم النسبي أو الفرق بين مجموعتين هو العنصر أو مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى ولا تنتمي للمجموعة الثانية.
نقرأ علاقة الفرق بين مجموعتين A\B A فرق B أو A ناقص. B
مثال توضيحي:
$A=(S,D,F,G,H,J)$
$B=(D,F,G,H,J)$
$A\backslash B=(S)$
Aفرق B أو A ناقص B يساوي العنصر S لأنه العنصر الموجود في المجموعة A و الغير موجود في المجموعة. B
$A\backslash B=A-B$
الفرق عملية طرح اعتيادية.
دعي المتمم النسبي بهذا الاسم تمييزا له عن المتمم المطلق لأنه يختص بالنقص الموجود في مجموعة ما بالنسبة لمجموعة ثانية و ليس بالنسبة للمجموعة الشاملة و لو عدنا لمثال مجموعة الطوابع البريدية فلو كانت لديك مجموعة طوابع و لتكن A و كان لدى صديقك مجموعة طوابع B فإن المتمم النسبي يختص فقط بالطوابع الموجودة في مجموعتك و الغير موجودة في مجموعة صديقك , أي الطابع أو مجموعة

الطوابع التي تنقص مجموعة صديقك حتى تصبح مماثلة لمجموعتك, أي أن المتمم النسبي يبحث في النقص الموجود في مجموعة ما بالنسبة لمجموعة أخرى غير المجموعة الشاملة.

الفرق المتناظر: ⊕ Symmetric difference

راينا سابقا بأن فرق مجموعتين هو العنصر أو العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى و التي لا تنتمي للمجموعة الثانية - أي العناصر التي توجد في المجموعة الأولى و لا توجد في المجموعة الثانية.

و لكن هنالك مفهوم أكثر شمولا من مفهوم الفرق بين مجموعتين و أكثر شمولا من مفهوم المتمم النسبي حيث يتناول هذا المفهوم مجموعة العناصر التي توجد في مجموعة واحدة من المجموعتين ولا توجد في الأخرى.

الفرق المتناظر بين مجموعتين هو مجموع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط و ليس إلى كليهما.

نرمز للفرق المتناظر بدائرة تحوي خطين متعامدين. ⊕

الصيغة الرياضية للفرق المتناظر:

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus\setminus (A \cap B)$

إن الفرق المتناظر ⊕ بين المجموعتين A و B يساوي اتحاد المجموعة A مع المجموعة B فرق تقاطع ∩ المجموعة A مع المجموعة. B

⊕الفرق المتناظر

∪اتحاد.

/فرق.

∩تقاطع.

إن الفرق المتناظر بين مجموعتين يساوي حاصل جمع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية ناقص تقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية.

مثال توضيحي:

لتكن لدينا المجموعة س و تحوي العناصر:

س= ( سامر, نور, محمد, طارق, عمر , نجم (

ولتكن لدينا المجموعة م و تحوي العناصر:

م = ( طارق, عمر, نجم , مجد , عبيدة, يزن(

ما هو الفرق المتناظر بين المجموعتين م و س ؟

قلنا بأن الفرق المتناظر ⊕بين مجموعتين هو حاصل جمع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية أي اتحاد ∪ المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:

م ∪ س = ( سامر ,نور, محمد , طارق , عمر , نجم , مجد , عبيدة, يزن )

م U س = م +س
تذكر دائما بأننا في علم المجموعات لا نذكر أي عنصر أكثر من مرة واحدة فعندما نجمع مجموعتين مع بعضهما البعض فإن أي عنصر موجود في المجموعتين نذكره مرة واحدة فقط.
نتابع حساب الفرق المتناظر للمجموعتين:
إن الفرق المتناظر ⊕ بين المجموعتين A و B يساوي اتحاد المجموعة A مع المجموعة B فرق تقاطع ∩ المجموعة A مع المجموعة B.
الآن علينا أن نجد تقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية ومن ثم نقوم بطرحه من حاصل اتحاد المجموعتين مع بعضهما البعض:
تقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:
م∩س= م
تعلمون بأن تقاطع مجموعتين مع بعضهما البعض هو العناصر المشتركة بينهما -ما هي العناصر المشتركة بين المجموعتين م و س ؟
س= ( سامر, نور, محمد, طارق, عمر , نجم )
م = ( طارق, عمر, نجم , مجد , عبيدة, يزن )
م∩س= ( طارق , عمر, نجم )
تقاطع المجموعة م مع المجموعة س =( طارق , عمر, نجم )
لأنها عناصر مشتركة بين المجموعتين.
الآن نأتي إلى الخطوة الثالثة و الأخيرة في إيجاد الفرق المتناظر ⊕ بين مجموعتين و تتمثل في إيجاد فرق اتحاد المجوعتين من فرق تقاطعهما : أي طرح حاصل جمع المجموعتين من نتيجة تقاطعهما.
الآن:
اتحاد U المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:
م U س = ( سامر ,نور, محمد , طارق , عمر , نجم , مجد , عبيدة, يزن )
م U س = م +س
وتقاطع المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية:
م∩س=
م∩س= ( طارق , عمر, نجم )
تقاطع المجموعة م مع المجموعة س =( طارق , عمر, نجم )
لأنها عناصر مشتركة بين المجموعتين.
فرق اتحاد المجوعتين من فرق تقاطعهما : أي طرح حاصل جمع المجموعتين من نتيجة تقاطعهما.
فقط نتذكر تعريف الفرق بين مجموعتين:
فرق \ المجموعتين A و B أو الفرق بين المجموعتين A و B أو A فرق B يساوي العنصر أو مجموعة العناصر x التي تحقق الشرط : أنها تنتمي للمجموعة A و أنها لا تنتمي للمجموعة

B .

( سامر ,نور , محمد , طارق , عمر , نجم , مجد , عبيدة, يزن )\ ( طارق , عمر, نجم )=

(سامر, نور, محمد, مجد عبيدة , يزن)

هل هذه النتيجة صحيحة ؟

نتذكر تعريف الفرق المتناظر

إنه مجموعة العناصر التي توجد في مجموعة واحدة من المجموعتين ولا توجد في الأخرى.

هل ينطبق هذا التعريف على النتيجة التي وصلنا إليها ؟

هل ينتمي أي عنصر في النتيجة التي توصلنا إليها إلى كلتا المجموعتين ؟

النتيجة التي توصلنا إليها :

(سامر, نور, محمد, مجد عبيدة , يزن )

عناصر المجموعتين:

س= ( سامر, نور, محمد, طارق, عمر , نجم )

م = ( طارق, عمر, نجم , مجد , عبيدة, يزن )

إذا النتيجة صحيحة لأنه لا يوجد أي عنصر من عناصر النتيجة التي توصلنا إليها ينتمي إلى كلتا المجموعتين.

■طريقة ثانية لحساب الفرق المتناظر ⊕ بين مجموعتين:

و هذه الطريقة أكثر بساطة:

$A \oplus B=(A\backslash B)U(B\backslash A)$

إن الفرق التناظري ⊕ بين المجموعتين A و B يساوي اتحاد أو مجموع A فرق B مع B فرق. A

فإذا كانت لدينا المجموعتين:

A=(QM,W,E,R,T,Y,U)

B=( T,Y,U,I,O,P)

فإن الفرق التناظري ⊕ لهاتين المجموعتين يساوي:

A⁄B

Aفرق B

A⁄B=(Q,M,W,E,R)

Bفرق A

B⁄A=(I,O,P)

(A\B)U(B\A)

اتحاد A فرق B مع B فرق A

أي ناتج جمع A فرق B مع B فرق , A أي:

(Q,M,W,E,R,I,O,P)

نتذكر تعريف الفرق التناظري لمجموعتين بأنه مجموع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط و ليس إلى كليهما .

لدينا النتيجة التي حصلنا عليها و هي (Q,M,W,E,R,I,O,P) :

و لدينا عناصر المجموعتين:
A=(QM,W,E,R,T,Y,U)
B=( T,Y,U,I,O,P)
هل تحقق النتيجة التي حصلنا عليها الشرط بأنها تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط ؟
إذا النتيجة صحيحة.

■كيف حسبنا الفرق التناظري و فق الطريقة الثانية ؟
قلنا بأن الفرق التناظري لمجموعتين هو مجموع العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط و ليس إلى كليهما.
ولذلك فإننا ببساطة قمنا بإيجاد فرق المجموعة الأولى من المجموعة الثانية , أي أننا قمنا بإيجاد العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى ولا تنتمي إلى المجموعة الثانية ومن ثم قمنا بإيجاد فرق المجموعة الثانية من المجموعة الأولي أي أننا قمنا بإيجاد العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الثانية و لا تنتمي إلى المجموعة الثانية و بعد ذلك قمنا بجمع هاتين النتيجتين مع بعضهما البعض فحصلنا على العناصر التي تنتمي إلى مجموعة واحدة فقط من كلتا المجموعتين.
و بناء على ما سبق فإننا نستنتج بأن الفرق التناظري ⊕ لمجموعتين هو عملية فرق مضاعفة.

جبر المجموعات: Algebra od Sets
قانون الثبات : Idempotent الثبات في الرياضيات يتعلق بالمقادير الرياضية التي عندما تتم معاملتها مع نفسها فإنها تساوي نفسها , أي أن النتيجة تكون تلك المقادير ذاتها.
و هنالك عددين حقيقيين وحيدين يمتلكان ميزة الثبات و هما الواحد و الصفر فعندما يضرب كل من هذين العددين بنفسه فإن النتيجة تكون العدد نفسه:
$1\times1=1$
$0\times0=0$
وفي علم المجموعات نصادف كثيرا ميزة الثبات كما هي الحال في الأمثلة التالية:
AUA=A
اتحاد المجموعة A مع المجموعة A يساوي A
لنتحقق من هذا الأمر:
س = ( نور, سامر, مجد )
س U س = ( نور, سامر , مجد )
اتحاد س مع س = ( نور, سامر, مجد )
أي س + س = (نور, سامر , مجد )
لماذا بقيت المجموعة على حالها عندما جمعناها مع نفسها ؟

لأنه في علم المجموعات لا يذكر العنصر الواحد إلا مرة واحدة حتى لو تكرر مليار مرة.

مثال آخر عن الثبات أو الرسوخ فيعلم المجموعات:
$A∩A=A$
المجموعة A تقاطع المجموعة A يساوي المجموعة. A
تعلمون طبعا بأن تقاطع مجموعتين هو العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين.
لماذا يساوي تقاطع المجموعة A مع المجموعة A المجموعة A ؟
لأن تقاطع المجموعة A مع المجموعة , A أي أن العناصر المشتركة بين المجموعة A و المجموعة A هي جميع العناصر الموجودة في المجموعة , A و بما أن المجموعة تتحدد وفقا للعناصر المكونة لها فإن تقاطع المجموعة A مع المجموعة A هي كل المجموعة. A
مثال توضيحي:
س = ( نور, سامر, مجد )
س ∩س= ( نور, سامر, مجد )
س تقاطع س = ( نور, سامر , مجد)
العناصر المشتركة ما بين المجموعة س و المجموعة س هي جميع عناصر المجموعة س أي كامل المجموعة س و لذلك فإن س تقاطع س تساوي س.

■الخاصية الترابطية -التجميعية associative للعمليات على المجموعات:
يقصد بالخاصية التبديلية أو الخاصية الترابطية أن تغيير مواقع الأعداد الداخلة في عملية الجمع لا يؤثر في نتيجة تلك العملية:
$(5+2)+1 = 5+(2+1)$
و في علم المجموعات فإن:
$(AUB)UC=AU(BUC)$
اتحاد المجموعة A مع المجموعة B و اتحاد الناتج مع المجموعة C يساوي اتحاد المجموعة A مع ناتج اتحاد المجموعة B مع المجموعة. C
س = ( نور, سامر, مجد )
ع= ( عبيدة, نور, عمر)
ص= ( محمد , عمر, مجد )
الآن اتحاد المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية أي س U ع = ( نور, سامر, مجد, عبيدة , عمر)
اتحاد الناتج مع المجموعة = ( محمد , عمر , مجد, نور, سامر, عبيدة , محمد )
هذه النتيجة يجب أن تساوي اتحاد المجموعة س مع ناتج اتحاد المجموعة ع مع المجموعة ص.

اتحاد المجموعة ع مع المجموعة س = ( عبيدة, نور, محمد , مجد , عمر )
اتحاد هذا الناتج مع المجموعة س = ( نور , سامر, مجد , عبيدة, محمد , مجد , عمر )
النتيجة متطابقة.
اتحاد مجموعتين هو عملية جمع اعتيادية و لكن علينا الحذر من تكرار أي عنصر.

■مثال آخر على الظاهرة التجميعية:
(A∩B)∩C=A∩(B∩C)
ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة B تقاطع المجموعة C يساوي تقاطع المجموعة A مع ناتج تقاطع المجموعة B مع المجموعة. C
س = ( نور, سامر, مجد )
ع= ( عبيدة, نور, عمر)
ص= ( محمد , عمر, مجد )
ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ع = ( نور ) تقاطع المجموعة ص = Φ المجموعة الخالية - لأنه ليست هنالك عناصر مشتركة يساوي:
تقاطع المجموعة س مع ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص.
ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص = ( عمر )
ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص (عمر) تقاطع المجموعة س = المجموعة الخاليةΦ.
إذا النتيجة صحيحة.

■الخاصية التوزيعية: distributive
مثال على الخاصية التوزيعية:
4×(2+3)=(2×4)+(3×4)
20
AU(B∩C)=(AUB)∩(AUC)
اتحاد المجموعة A مع (ناتج تقاطع المجموعة B مع المجموعة C)يساوي اتحاد المجموعة A مع المجموعة B تقاطع اتحاد المجموعة A مع المجموعة. C
س = ( نور, سامر)
ع= (نور, عمر)
ص= ( محمد , مجد )
ناتج تقاطع المجموعة ع مع المجموعة ص -أي العناصر المشتركة بينهما (Φ) = اتحاد المجموعة س = (نور, سامر)
تذكر النتيجة ( نور , سامر)
اتحاد المجموعة س مع المجموعة ع = (نور, سامر, عمر) تقاطع

اتحاد المجموعة س مع المجموعة ص:
اتحاد المجموعة س مع المجموعة ص = ( نور, سامر, مجد , محمد ) تقاطع اتحاد المجموعة س مع المجموعة ع = ( نور, سامر , عمر )
( نور, سامر, مجد, محمد ) تقاطع ( نور, سامر , عمر ) = ( نور , سامر )
( نور , سامر ) النتيجة صحيحة.

حالة توزيعية أخرى:
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
تقاطع المجموعة A مع ناتج اتحاد المجموعة B مع المجموعة C يساوي اتحاد ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة B مع ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة C.
س = ( نور, سامر )
ع= (نور, عمر )
ص= ( محمد, مجد )
تقاطع المجموعة A مع ناتج اتحاد المجموعة B مع المجموعة C :
ناتج اتحاد المجموعة ع مع المجموعة ص=
ع U ص = ( نور, عمر, محمد, مجد )
( نور , عمر, محمد , مجد ) تقاطع المجموعة س أي ( نور , سامر ) = ( نور ) لأن ( نور ) هو العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين.
نتيجة الحد الأول ( نور ) تذكر هذه النتيجة.
يساوي اتحاد ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة B مع ناتج تقاطع المجموعة A مع المجموعة C :
ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ع = (نور)
ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ص = المجموعة الخالية (Φ)لأنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما.
الآن نحسب اتحاد ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ع مع ناتج تقاطع المجموعة س مع المجموعة ص:
( نور ) = ( نور ) U Ø
اتحاد (نور) مع المجموعة الخالية يساوي ( نور)
لأن اتحاد أي مجموعة مع المجموعة الخالية يساوي تلك المجموعة.
النتيجة صحيحة.

■قوانين التماثل: Identity
$A\cup\emptyset=A$
اجتماع المجموعة A مع المجموعة الخالية يساوي المجموعة A .

كما نقول بأن:
1+0=1

AU U = U
اتحاد المجموعة A مع المجموعة الشاملة U = المجموعة الشاملة.
هل يمكن أن نقول هنا بأن اتحاد المجموعة A مع المجموعة الشاملة يساوي المجموعة الشاملة U + المجموعة A ؟
بالطبع لا يمكن ذلك لأن المجموعة A هي جزء من المجموعة الشاملة , فإذا ذكرنا المجموعة الشاملة فهذا يعني ضمنيا أن المجموعة A و كل مجموعة أخرى معنية بالأمر , كما لو قلنا مثلا بأن الدولار هو عملة الولايات المتحدة و عملة ولاية كاليفورنيا , هذا الكلام لا معنى له لأن ولاية كاليفورنيا هي جزء من الولايات المتحدة ( حتى ساعة كتابة هذا البحث) , كما لو قلت كذلك بأنك زرت أوروبا كلها و زرت فرنسا لأن زيارتك لأوروبا كلها يعني ضمنيا بأنك زرت فرنسا.

A⋂U=A
تقاطع المجموعة A مع المجموعة الشاملة U يساوي المجموعة A .
أي أن الشيء المشترك ما بين المجموعة A و المجموعة الشاملة هو المجموعة. A
العنصر المشترك ما بين ولاية كاليفورنيا و بين الولايات المتحدة هو ولاية كاليفورنيا بمعنى أنك لو رسمت دائرتين تمثلان مجموعتين أسميت إداهما كاليفورنيا و أسميت الأخرى الولايات المتحدة و كتبت داخلها أسماء الولايات الأمريكية المختلفة و أردت أن تجد العنصر المشترك بين هاتين المجموعتين فإنك سترسم خطا يصل ما بين مجموعة كاليفورنيا و بين اسم ولاية كاليفورنيا الموجود في مجموعة الولايات المتحدة.

العنصر المشترك ما بين شهر رمضان و بين مجموعة أشهر السنة الهجرية هو شهر رمضان:
رمضان -------------------------رمضان
شعبان
ذو القعدة
ذو الحجة
000

A∩ϕ=Φ
تقاطع المجموعة A مع المجموعة الخالية φ يساوي المجموعة الخالية.

ما هو الشيء المشترك ما بين أي مجموعة و المجموعة الخالية φ ؟
إنه المجموعة الخالية , لماذا؟
لأن المجموعة الخالية هي جزء من كل مجموعة , أي أنها موجودة في كل مجموعة.
هذا الكلام حتى و إن لم يكن دقيقا فإنه يساعدنا على تذكر القاعدة كما أنه يؤدي إلى نتيجة صحيحة.

■ قانون الإكمال: Complement law
A U AC=U
اتحاد المجموعة A مع المتمم المطلق للمجموعة Ac يساوي المجموعة الشاملة.
المتمم المطلق لمجموعة ما هي مجموعة العناصر التي إذا أضيفت إلى مجموعة ما فإنها تجعل منها مجموعة شاملة , أي أن المتمم المطلق هو مجموعة العناصر التي تنقص مجموعة ما حتى تكون مجموعة شاملة.
و لو عدنا إلى مثال مجموعة الطوابع فإذا كانت لديك مجموعة طوابع و لتكن A فإن المكمل المطلق أو المتمم المطلق لمجموعة الطوابع التي تمتلكها AC هو جميع الطوابع التي تنقص مجموعتك حتى تصبح مجموعة شاملة تضم جميع الطوابع الموجودة في العالم.
و لهذا السبب فإن:
المجموعة + المكمل المطلق لهذه المجموعة = المجموعة الشاملة.

■ قانون الإكمال الثاني:
UC=φ
المكمل المطلق للمجموعة الشاملة هو المجموعة الخالية.
U المجموعة الشاملة.
Uc المكمل المطلق للمجموعة الشاملة.
Φ المجموعة الخالية.

لماذا المكمل المطلق للمجموعة الشاملة هو المجموعة الخالية ؟
لأنه يشترط في المجموعة الشاملة أن تكون مجموعة كاملة لا ينقصها أي عنصر و إذا نقصت المجموعة الشاملة و لو عنصرا واحدا فإنها لا تكون مجموعة شاملة وبالتالي فإن المجموعة الشاملة لا ينقصها أي عنصر و لذلك فإن ما ينقص المجموعة الشاملة هو العدم أو اللاشيء أو الصفر أو بلغة علم المجموعات هو المجموعة الخالية , أي أن المكمل المطلق للمجموعة الشاملة حتى تصبح مجموعة شاملة هو المجموعة

الخالية.
■قانون الإكمال الثالث:

ΦC=U
المكمل المطلق للمجموعة الخالية هو المجموعة الشاملة.
المجموعة الخالية هي الصفر أو العدم فما الذي ينقص
المجموعة الخالية حتى تصبح مجموعة شاملة تضم جميع العناصر
؟ إن الذي ينقصها حتى تصبح مجموعة شاملة هو جميع العناصر
, أي أن ما ينقصها هو المجموعة الشاملة.
ما الذي ينقص الصفر حتى يصبح مليار ؟ ينقص الصفر مليار
حتى يصبح مليار.
ما الذي ينقص الصفر حتى يصبح مليون ؟ ينقص الصفر مليون
حتى يصبح مليون.

■قوانين دي مورجان: De Morgan's laws
أوغوستوس دي مورجان: Augustus De Morgan رياضي إنكليزي
ولد في العام 1806 إليه ينسب قانون دي مورجان و الذي يعرف
أحيانا بثنائية دي مورجان. De Morgan duality

(AUB) 〚^c〛=A〚^c〛∩B〚^█(c @)〛

المتمم المطلق c لحاصل اتحاد المجموعة A مع المجموعة B
يساوي المتمم المطلق للمجموعة AC تقاطع المتمم المطلق
للمجموعة .Bc
إذا كان لكل من المجموعتينA و B متمم مطلق مشترك فمن
الطبيعي أن يكون ذلك المتمم المطلق المشترك مساويا لتقاطع
المكمل المطلق للمجموعة A مع المكمل المطلق للمجموعة. B
أولا علينا أن نتذكر بعض الأمور:
المتمم المطلق C لمجموعة ما هو مجموعة العناصر التي تنقص
تلك المجموعة حتى تصبح مجموعة شاملة U تضم كل العناصر.
تقاطع مجموعتين ∩ : هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما.
المجموعة الشاملة : هي المجموعة الكاملة التي تضم كل
العناصر.
لنفترض بأن عدد الدجاج في العالم مليار دجاجة و أن هذه
المليار دجاجة موجودة ضمن مجموعة تدعى بالمجموعة الشاملة
, Uأي أن هذه المجموعة الشاملة تضم مليار دجاجة .
و لنفترض بأنه كان لدينا مدجنتين فارغتين لا تحويان أية
دجاجة المدجنة الأولى دعوناها بالمجموعة A بينما دعونا
المدجنة الفارغة الثانية بالمجموعة. B
إذا اتحدت هاتين المدجنتين مع بعضهما البعض كم يلزمهما
حتى تصبحا مجموعة شاملة , أي ما هو المكمل المطلق لهما ؟
يلزمهما مليار دجاجة حتى تصبحا مجموعة شاملة أي أن المتمم

المطلق لهما هو مليار دجاجة على اعتبار أن عدد الدجاج في العالم هو مليار دجاجة أي أن المجموعة الشاملة U تضم مليار دجاجة.
الآن لو اعتبرنا كل مدجنة على حدة:
ما هو المتمم المطلق للمدجنة الأولى الخاوية (المجموعة) A ؟
أي كم يلزم المدجنة الأولى الخاوية (المجموعة A )حتى تصبح مجموعة شاملة ؟
يلزمها مليار دجاجة حتى تصبح مجموعة شاملة.
ما هو المتمم المطلق للدجاجة السوداء؟
أي كم يلزم المدجنة الأولى الخاوية (المجموعة A )حتى تصبح مجموعة شاملة؟
يلزمها مليار دجاجة حتى تصبح مجموعة شاملة.

ما هي نتيجة تقاطع المكمل المطلق للمدجنة الأولى مع المكمل المطلق للمدجنة الثانية ؟
أي ما هي العناصر المشتركة بين المكمل المطلق للمدجنة الأولى و بين المكمل المطلق للمدجنة الثانية ؟
إنها جميع الدجاجات أي المليار دجاجة.
لماذا لأن كل مدجنة من هاتين المدجنتين تحتاج إلى المليار دجاجة ذاتها حتى تصبح مجموعة شاملة و هذا يعني بأن هذه المليار دجاجة (المكمل المطلق) بأكملها مشتركة بين هاتين المدجنتين أو المجموعتين.

المتمم المطلق c لحاصل اتحاد المجموعة A مع المجموعة B يساوي المتمم المطلق للمجموعة A تقاطع المتمم المطلق للمجموعة B.

■قانون دي مورجان الثاني:
$(A∩B)^C = A^C ∪ B^C$
إن نتيجة تقاطع ∩ المكمل المطلق C لكل من المجموعة A مع المجموعة B يساوي اتحاد المكمل المطلق للمجموعة AC مع المكمل المطلق للمجموعة BC .
أولا نتذكر معاني بعض المصطلحات:
المكمل المطلق أو المتمم المطلق C هو كل ما ينقص مجموعة ما حتى تصبح مجموعة شاملة , U أي مجموعة تضم جميع العناصر.
نتيجة تقاطع مجموعتين ∩ : هي العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين.
الآن:
لنفترض بأن عدد التلاميذ في العالم هو مليار تلميذ بمعنى أن هؤلاء المليار تلميذ أو هؤلاء المليار عنصر يشكلون

المجموعة الشاملة U التي تضم جميع العناصر , على اعتبار أنها تضم جميع تلاميذ العالم.
لنفترض بأنه كانت هنالك مدرسة خاوية ندعوها بالمجموعة. A
الآن ما هو المكمل المطلق حتى تصبح المدرسة الخاوية A مجموعة شاملة تضم كل العناصر؟
المكمل المطلق لهذه المدرسة الخاوية هو مليار تلميذ ( على فرض أن هذا هو عدد تلاميذ العالم.
لنفترض بأنه كانت هنالك مدرسة ثانية خاوية ندعوها بالمجموعة. B
ما هو المكمل المطلق لهذه المدرسة الثانية الخاوية (المجموعة B )حتى تصبح تلك المدرسة مجموعة شاملة تضم كل العناصر؟
المكمل المطلق للمدرسة الثانية الخاوية (المجموعة B )حتى تصبح تلك المدرسة مجموعة شاملة تضم كل العناصر هو مليار تلميذ.
إن نتيجة تقاطع ∩ المكمل المطلق C لكل من المجموعة A مع المجموعة B يساوي اتحاد المكمل المطلق للمجموعة AC مع المكمل المطلق للمجموعة. BC
ما هي نتيجة تقاطع المكمل المطلق لكل من المدرسة الأولى مع المدرسة الثانية ؟
أي ما هي العناصر المشتركة بين المكمل المطلق للمدرسة الأولى مع المكمل المطلق للمدرسة الثانية ؟
العناصر المشتركة بين المكملين هي جميع العناصر أي المليار تلميذ لأن كلتا هاتين المدرستين تحتاج إلى المليار تلميذ ذاتها حتى تصبح مجموعة شاملة تضم كل العناصر (كل تلاميذ العالم.(
كم يبلغ اتحاد U المكمل المطلق للمجموعة الأولى مع المكمل المطلق للمجموعة الثانية؟
أي كم يبلغ ناتج جمع المكمل المطلق للمدرسة الأولى مع المكمل المطلق للمدرسة الثانية؟
المكمل المطلق للمدرسة الأولى يبلغ مليار تلميذ و المكمل المطلق للمدرسة الثانية يبلغ مليار تلميذ و الآن:
مليار تلميذ U مليار تلميذ = مليار تلميذ
مليار تلميذ + مليار تلميذ = مليار تلميذ , لماذا؟
لأننا في علم المجموعات لا نكرر ذكر أي عنصر .فنقول مثلا:
سامر U سامر = سامر
اتحاد سامر مع سامر = سامر
إذا:
إن نتيجة تقاطع ∩ المكمل المطلق C لكل من المجموعة A مع المجموعة B يساوي اتحاد المكمل المطلق للمجموعة AC مع المكمل المطلق للمجموعة. BC

■المجموعة المحدودة - المجموعة المنتهية: Finite set
المجموعة المحدودة أو المجموعة المنتهية finite site هي المجموعة التي تحتوي عددا محدودا من العناصر و قابلا للحصر و على سبيل المثال فإن المجموعة الخالية Ø هي مجموعة محدودة و منتهية لأنها تحوي صفر عنصر - مجموعة الأعداد من واحد إلى عشرة هي مجموعة منتهية و محدودة و كذلك الحال بالنسبة إلى مجموعة المدرسة فهي مجموعة محدودة و منتهية لأنها تحوي عددا محدودا و قابلا للعد و الحصر من التلاميذ ( العناصر) و مجموعة أحرف الأبجدية لأنها تحوي عددا محدودا من العناصر (الأحرف(

المجموعة غير المحدودة و غير المنتهية infinite set هي المجموعة التي تحتوي على عدد غير محدود و غير قابل للحصر من العناصر مثل مجموعة الأعداد {1, 2{n ,..., ,

لماذا نعتبر مجموعة الأعداد مجموعة غير محدودة و غير منتهية ؟

لأنها غير قابلة للحصر فهل يوجد شخص في العالم يستطيع أن يقول لنا ما هو أعلى رقم يمكن الوصول إليه و ليس بعده رقم أكبر منه ؟

و الحال كذلك بالنسبة لمجموعة الأعداد الزوجية و مجموعة الأعداد الفردية فكلها مجموعات غير منتهية ولا يمكن حصر عناصرها برقم معين.

و كقاعدة عامة فإن:

All finite sets are countable , but not all countable sets are finite.

جميع المجموعات المنتهية قابلة للعد و لكن ليست جميع المجموعات القابلة للعد منتهية.

يشار للمجموعات المنتهية بحرف n يوضع قرب اسم المجموعة.

حالة:

$n(A)+n(B)=n(AUB)$

$n(A)+n(B)=n(AUB)$

إذا كانت كل من المجموعتينA و B مجموعتين منفصلتين منتهيتين و محدودتين فإن اتحاد المجموعة A مع المجموعة B هو كذلك مجموعة منتهية.

المجموعات التي تكون محدودة عندما تكون منفصلة تبقى محدودة عند اتحادها مع مجموعات أخرى منتهية.

■قوة المجموعة: Power set

قوة المجموعة هي التعبير عن جميع الفئات الجزئية التي تتبع تلك المجموعة.

A Power Set is a set of all the subsets of a set.

يستخدم الرمز S للتعبير عن جميع العناصر و المجموعات

الجزئية التي تتبع تلك المجموعة.
P(S) = Power set = قوة المجموعة
الحرف S هو اختصار لكلمة ( مجموعة set (و نحن دائما نكتبه كبيرا و بين قوسين.
دائما يعبر عن قوة مجموعة ما بعدد 2 مرفوع لقوة معينة هي عدد عناصر تلك المجموعة و عدد مجموعاتها الجزئية فإذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من سبعة عناصر فإننا نعبر عن قوة تلك المجموعة بعدد 2 مرفوع للقوة 7:
27
و في حال لم يتم تحديد قوة المجموعة , أي في حال لم يتم تحديد عدد عناصرها و مجموعاتها الجزئية فإننا عندها نعبر عن قوة تلك المجموعة بعدد 2 مرفوع للقوة. n
2n
بالطبع فإن الحرف n هو اختصار لكلمة ( عدد ) وهو يرمز لأي عدد كان..

كيف تعبر عن قوة مجموعة تتألف من ستة عناصر ؟
لتكن لدينا المجموعة (S) التي تتألف من ستة عناصر:
S=(1,2,3.4,5,6)
نقول بأن قوة هذه المجموعة تساوي:
P(S)=2n=26=64
قوة هذه المجموعة تساوي 64.
P(S) = power set = قوة المجموعة.

الدالة - التابع Function

الدالة - التابع Function
عندما تكون هنالك علاقة ما بين عنصر ما من مجموعة ما و عنصر آخر من مجموعة ثانية فإننا نعبر عن تلك العلاقة بسهم يصل ما بين هذين العنصرين , و هذا السهم ينطلق من العنصر المصدر إلى العنصر الهدف.

المجموعة A المجموعة B
استراليا ----------------← كندا
المانيا ------------------← إنكلترا
الدنمارك --------------- ← فنلندا

نعبر عن الدوال أو التوابع Functions برمز معين , كما نعبر عن علاقة التابعية بين عنصرين بسهم : ←
فإذا رمزنا لتابع ما أو دالة ما function تربط بين مجموعتين بالحرف f مثلا فإننا نعبر عن علاقة التابعية بالشكل التالي:

f:A→B

الدالة أو التابع f على اعتبار أن هذه الدالة تربط ما بين A و B او أنه تابع من A إلى B) مصدره A و هدفه. ( B

تابعي السقف و الأرض: Ceiling and Floor Functions
)الحد الأدنى و الحد الأعلى(
إذا كان x عددا حقيقيا فإنه لا بد واقع بين عددين صحيحين أدنى و أعلى منه يسميان أرض و سقف , فالحد الأدنى للعدد x أو تابع الأرض لذلك العدد يشير إلى أكبر عدد صحيح لا يزيد عن العدد x , أما الحد الأعلى للعدد x أو تابع السقف للعدد x فإنه يشير إلى أقل عدد صحيح لا يقل عن العدد x .

وبذلك نكون بعون الله قد أنهينا بحث المجموعات و العناصر.

# المتواليات الهندسية

## ■المتوالية الحسابية - المتوالية العددية Arithmetic progression:

المتوالية الحسابية أو المتوالية العددية هي عبارة عن سلسلة من الأعداد المتتابعة التي تتزايد أو تتناقص بشكل ثابت.
مثال على المتوالية الحسابية أو المتوالية العددية:
عندما تعد من واحد لعشرة مثلا أو من عشرة لمئة أو من واحد لألف أو عندما تعد بشكل عكسي من مئة لواحد فإن سلاسل الأعداد تلك هي متواليات حسابية أو متواليات عددية لأنها تنقص أو تزداد بشكل ثابت ذلك أن كل عدد في تلك السلسلة أو تلك المتوالية هو أكبر من العدد الذي يسبقه بعدد واحد كما أنه أصغر من العدد الذي يليه بعدد واحد كذلك.

## ■المتوالية الهندسية - المتتابعة الهندسية Geometric Sequences - geometric progression:

المتوالية الهندسية هي سلسلة من الأعداد و في هذه السلسلة فإن كل عدد يضرب بعدد ثابت حتى نحصل على العدد الذي يليه في تلك السلسلة.
سلسلة الأعداد 1,2,4,8,16..... هي عبارة عن متوالية هندسية - لماذا ؟
لأننا نضرب كل عدد فيها بالعدد 2 حتى نحصل على العدد الذي يليه في تلك المتوالية أو السلسلة , فنحن ضربنا العدد 1 بالعدد 2 حتى نحصل على العدد الذي يليه و هو العدد 2 ثم ضربنا العدد 2 بالعدد 2 فحصلنا على العدد الذي يليه و هو العدد أربعة ثم ضربنا العدد 4 بالعدد 2 فحصلنا على العدد 8 ثم ضربنا العدد 8 بالعدد 2 فحصلنا على العدد الذي يليه و هو العدد 16 و هكذا إلى ما لا نهاية.

بكلمات أخرى فإن المتوالية الهندسية أو المتتابعة الهندسية geometric sequence هي تتابع أعداد يتم إيجاد كل عدد فيها عن طريق ضرب العدد السابق له بعدد ثابت ( غير الصفر) و يدعى هذا العدد الثابت بالنسبة الثابتة common ratio .
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
في المثال السابق تم ضرب كل عدد من الأعداد الموجودة في تلك المتوالية الهندسية بالعدد 2 للحصول على العدد الذي يليه.

أبرم شخص ما عقدا مع مليونير أمريكي يقضي بأن يدفع ذلك الشخص للمليونير مئة الف دولار أمريكي مقابل أن يعطيه المليونير دولارا واحدا في اليوم الأول و ان يعطي ذلك الشخص للمليونير في اليوم الثاني مئة ألف دولار مقابل أن يعطيه المليونير دولارين اثنين و ان يعطي ذلك الشخص للمليونير مئة ألف دولار في اليوم الثالث مقابل أن يعطيه المليونير أربع دولارات بمعنى أن يعطي المليونير لذلك الشخص كل يوم ضعف المبلغ الذي كان يعطيه إياه في اليوم السابق - المهم في الأمر أن ذلك المليونير تعرض للإفلاس نتيجة ذلك العقد الذي أبرمه مع ذلك الشخص و ذلك بسبب جهله بالمتوالية الهندسية.
حاول أن تحسب المبالغ التي كان يتوجب على ذلك المليونير أن يدفعها لذلك الشخص بعد مرور شهر من إبرام العقد.

المتوالية الهندسية السابقة هي على المنوال التالي:
2,4,8,16,32,64,128......,1

كل عدد في المتوالية الهندسية السابقة يساوي حاصل جمع جميع الأعداد التي سبقته مضافا إليه العدد واحد:
فالعدد 128 يساوي 1+2+4+8+16+32+64 مضافا إليها العدد واحد.
و العدد 64 يساوي 1+2+4+8+16+32 مضافا إليها العدد واحد.

■حتى نعرف مجموع جميع الأعداد الداخلة في المتوالية الهندسية فإننا نضرب آخر عدد وصلت إليه المتوالية الهندسية بالعدد 2 ثم نطرح منه العدد واحد.
فإذا كان آخر عدد أو اكبر عدد في متوالية هندسية ما هو الرقم 20480 و أردنا ان نعرف مجموع جميع الأعداد الداخلة في هذه المتوالية الهندسية فإننا نضرب ذلك الرقم بالعدد 2 ثم نطرح منه العدد واحد:

20480 ×2=40960
40960−1=40959
40959هو مجموع الأعداد الداخلة في تكوين تلك المتوالية.

في مثالنا السابق إذا أردنا ان نحسب مقدار ما دفعه المليونير لذلك الشخص خلال شهر واحد فإن علينا ان نضرب الرقم الذي طابق اليوم الثلاثين في تلك المتوالية بالعدد 2 و ان نضيف له العدد واحد كما تعلمنا من قبل.
لماذا اليوم الثلاثين أو العدد الثلاثين في تلك المتوالية ؟
لأننا نريد ان نعرف جميع المبالغ التي دفعها المليونير لذلك الشخص خلال شهر واحد فقط.
فإذا علمنا بأن المليونير دفع لذلك الشخص في اليوم الثلاثين مبلغ 5368709 فهذا يعني بأن مجموع ما دفعه المليونير خلال شهر هو:
5368709×2+1= 10737419
10737419دولار أي بحدود 11 مليون دولار , وذلك خلال شهر واحد فقط.

كم سيأخذ ذلك الشخص من المليونير في اليوم الواحد و الثلاثين و فقا لتلك المتوالية الهندسية ؟
إذا أخذ من المليونير في اليوم الثلاثين 5368709 دولارا فهذا يعني بأنه سيأخذ منه في اليوم الواحد و الثلاثين ضعف

ذلك المبلغ أي:
$5368709\times2=10737418$

إذا فقد كان ذلك الشخص يدفع للمليونير مئة ألف دولار يوميا مقابل أن يعطيه المليونير دولارا في اليوم الأول ثم أن يقوم بمضاعفة الدولار يوما بعد يوم و في اليوم الواحد و الثلاثين يكون ذلك الشخص قد أعطى المليونير 3 ملايين و مئة ألف ولار بينما يكون قد أخذ منه أكثر من عشرة ملايين و 700 ألف دولار.

تعتبر الشائعات و طريقة انتشارها أحد التطبيقات العملية للمتوالية الهندسية فالشخص الأول الذي اطلق الشائعة قام بإخبارها مثلا لخمسة اشخاص و من ثم فقد قام كل واحد من أولئك الخمسة أشخاص بإبلاغ خمسة آخرين فأصبح عدد من يعرفون الشائعة ثلاثين شخصا بالإضافة إلى الشخص الذي أطلقها :
$5+(5\times5)=30$
العدد خمسة الموجود خارج القوس يدل على أول خمسة أشخاص سمعوا بالشائعة من الشخص الذي أطلقها.
$(5\times5)$تشير إلى أن كل واحد من الخمسة الأوائل الذين سمعوا الشائعة قام بإبلاغ خمسة أشخاص آخرين بتلك الشائعة حتى أصبح لدينا ثلاثين شخصا قد سمعوا بتلك الشائعة بما في ذلك الخمسة الأوائل.
الآن و بعد مرور نصف ساعة مثلا يكون كل واحد من هؤلاء الثلاثين شخصا قد قام بإبلاغ خمسة اشخاص جدد فيصبح لدينا 180 شخصا يعرفون تلك الشائعة : الثلاثين شخصا السابقين + 150 شخصا الذين قام أولئك الثلاثين بإبلاغهم الشائعة:
$30+(30\times5)=180$
30 الأشخاص الذين قاموا بنشر الشائعة.
$(30\times5)$تدل على ان كل واحد من أولئك الثلاثين قام بإبلاغ الشائعة لخمسة أشخاص آخرين.
الآن بعد مرور نصف ساعة يقوم كل واحد من المئة و ثمانين شخصا بإبلاغ الشائعة لخمسة أشخاص آخرين:
$180+(180\times5)=1080$
180 : الأشخاص الذين قاموا بنشر الشائعة.
$(180\times5)$تعني بأن كل واحد من أولئك المئة و الثمانين شخصا قد أبلغ الشائعة لخمسة أشخاص.

= 1080عدد الأشخاص الذين قاموا بنشر الشائعة مضافا إلى عدد الأشخاص الجدد الذين وصلت إليهم الشائعة.
و إذا أكملنا هذه العملية الحسابية سنكتشف بأنه بعد مرور بضعة ساعات فإن الشائعة تكون قد وصلت إلى مئات الآلاف.

يحكى بأن أحد الملوك أراد ان يكافئ مخترع لعبة الشطرنج على اختراعه و لما سأله عن نوع المكافئة التي يرغب بها طلب مخترع لعبة الشطرنج من الملك أن تكون مكافئته عبارة عن حبات قمح على أن توضع على شكل متوالية هندسية حسب عدد مربعات رقعة الشطرنج - في البداية ظن الملك أن الأمر لن يتطلب منه إلا بضعة مئات من حبوب القمح و لكنه اكتشف لا حقا بأنه يتوجب عليه أن يمنحه كميات من القمح تفوق ما هو موجود في كل مستودعات الغلال الموجودة على ظهر كوكب الأرض.
أنتم تعلمون بأن رقعة الشطرنج تحوي 64 مربعا , فإذا وضعنا حبة قمح في المربع الأول و حبتي قمح في المربع الثاني و أربع حبات قمح في المربع الثالث و ثمان حبات قمح في المربع الرابع فكم عدد حبات القمح التي يتوجب علينا أن نضعها في المربع الأخير في رقعة الشطرنج , أي المربع 64 ؟
إن كل مربع من المربعات الأربعة و الستين يجب أن يحوي ضعف العدد الذي يحتويه المربع السابق له من حبات القمح كما يجب أن يحتوي كل مربع على نصف عدد حبات القمح الذي يحتويها المربع الذي يليه , وهذا يعني بأنه إذا كان علينا أن نعرف عدد حبات القمح فيجب أن لا نضرب العدد 2 بالرقم 64 و إنما يتوجب علينا أن نضرب الرقم 2 بنفسه 64 مرة:
2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2....
لتسهيل عملية الضرب في مثل هذه الحالات فإننا نقسم عملية الضرب هذه إلى ست أجزاء
كل جزء منها يحوي العدد اثنين مضروبا بنفسه عشر مرات و بذلك نكون قد حسبنا العدد ستين و يتبقى علينا العدد أربعة نحسبه في مجموعة تحوي العدد اثنين مضروبا بنفسه أربع مرات و بضرب الناتج الذي حصلنا عليه في كل جزء فإننا نكون قد حسبنا عدد حبات القمح التي يتوجب وضعها في المربعات الأربعة و الستين الخاصة برقعة الشطرنج.
في كل مجموعة من المجموعات الستة فإننا نضرب العدد اثنين بنفسه عشر مرات فتكون النتيجة 1024.
)انتبه جيدا إلى اننا نضرب العدد اثنين بنفسه عشر مرات ولا نضربه بالعدد عشرة(
يمكنك أن تضرب العدد اثنين بنفسه عشر مرات باستخدام الآلة الحاسبة و ذلك برفع العدد اثنين إلى القوة عشرة و للقيام بذلك اتبع الخطوات التالية:
اضغط الرقم 2 ( لأن الرقم اثنين هو العدد الذي نريد رفعه للقوة(

اضغط الزر ) Xy زر الرفع للقوة(
اضغط الزر 10 ( لأننا نريد رفع العدد اثنين إلى القوة عشرة أي أننا نريد أن نضرب العدد 2 بنفسه عشر مرات(
اضغط الزر = يساوي
فتحصل على النتيجة 1024.

يصبح لدينا ست مجموعات كل مجموعة تتألف من الرقم 1024.
لحساب المربعات الأربعة المتبقية من خانات الشطرنج فإننا نضرب العدد اثنين بنفسه أربع مرات ( ولا نضربه بالعدد أربعة (
2×2×2×2=16
و يمكننا حل هذه المسالة برفع العدد اثنين إلى القوة أربعة في الآلة الحاسبة:
اضغط الزر 2 ( العدد الذي تريد رفعه للقوة(
اضغط الزر ) XY زر الرفع للقوة)
اضغط الزر 4 ( القوة التي تريد رفع العدد إليها (
اضغط زر يساوي=
تحصل على النتيجة و هي بالطبع 16.

الان أصبح لدينا ست مجموعات يتألف كل منه من الرقم 1024 و مجموعة واحدة تتألف من الرقم 16 على اعتبار أن عدد خانات رقعة الشطرنج هي 64 خانة.
ماذا نفعل بهذه المجموعات , هل نجمعها مع بعضها البعض حتى نعرف عدد حبات القمح التي يتوجب وضعها في خانات رقعة الشطرنج؟
كلا , إياك أن تقوم بجمعها مع بعضها البعض لأن المطلوب كان في البداية أن نضرب العدد اثنين ببعضه 64 مرة لا أن نجمعه مع بعضه , و ليس أن نضربه بالعدد 64.
إذا المطلوب منا الان أن نضرب الرقم 1024 بنفسه ست مرات لأن لدينا ست مجموعات كل مجموعة منها هي حاصل ضرب العدد اثنين مع بعضه عشر مرات , كما يتوجب علينا أن نضرب الناتج كذلك مع العدد 16 الذي يمثل الخانات الأربعة في رقعة الشطرنج.
لتسهيل عملية الضرب فإننا نقسم المجموعات الستة إلى ثلاث مجموعات تحوي كل منها رقمي 1024 نقوم بضربهما مع بعضهما البعض:
1024×1024=1048576
و هكذا أصبح لدينا ثلاث مجموعات تحوي كل منهما الرقم 1048576.
الآن يتوجب علينا أن نحسب الآتي:
1048576×1048576×1048576×16
حتى نعرف عدد حبات القمح اللازم لملء خانات رقعة الشطرنج

الأربعة و السنين.
إن النتيجة ستكون:

| 18 446 744 073 709 551 616 |
|---|

و يمكنك ان تحسب النتيجة على الآلة الحاسبةبكل بساطة و دون أن تخوض في كل تلك الحسابات المجهدة وذلك برفع العدد اثنين إلى القوة 64: و للقيام بذلك
اضغط العدد 2
اضغط زر الرفع للقوة $X^Y$
اضغط الرقم 64
اضغط الزر=

18446744073709551616

برأيكم كم كيلو غرام من القمح سنحتاج للحصول على هذا العدد من الحبوب ؟
إن المتر المكعب الواحد من القمح يحتوي على نحو خمسة عشر مليون حبة قمح , و هذا يعني ان عدد حبات القمح الذي طلبها مخترع لعبة الشطرنج تحتاج إلى مستودع حبوب حجمه 12 ألف كيلو متر مكعب.

إثنى عشر ألف كيلو متر مكعب .

~~( و ليس 12 ألف متر مكعب) 12GDSاثنا عشر ألف متر مكعب من القمح.~~

لو أن مخترع لعبة الشطرنج كان قد طلب من الملك أن تكون مكافئته أن يوضع له في كل خانة من خانات رقعة الشطرنج عدد من حبات القمح يساوي ثلاثة أضعاف العدد الموجود في الخانة التي تسبقها , أي أن توضع حبات القمح على شكل متوالية

هندسية على الشكل التالي:
1,3,9,18,36,72.....
فكيف كنا سنحسب عدد حبات القمح التي تلزمنا لملء جميع خانات رقعة الشطرنج الستة و الأربعين ؟
كان يتوجب علينا عندها ان نتبع الخطوات السابقة ذاتها و لكن بدلا من ان نضرب العدد 2 بنفسه 46 مرة , كان يتوجب علينا عندها أن نضرب العدد 3 بنفسه 64 مرة , لماذا؟
لأن مخترع اللعبة طلب من الملك أن تحوي كل خانة من خانات رقعة الشطرنج ثلاثة أمثال العدد الموجود في الخانة السابقة.
كما أن بإمكاننا أن نحسب ذلك عن طريق رفع العدد ثلاثة للقوة 64 عن طريق الالة الحاسبة وفق الخطوات:
نضغط العدد ثلاثة.
نضغط زر الرفع للقوة. $X^Y$
نضغط الرقم 64 لأننا نرغب في رفع العدد ثلاثة للقوة 64.
نضغط يساوي=

ولو أن مخترع لعبة الشطرنج طلب كان قد طلب من الملك أن تكون مكافئته أن يوضع له في كل خانة من خانات رقعة الشطرنج عدد من حبات القمح يساوي أربعة أضعاف العدد الموجود في الخانة التي تسبقها لكنا ببساطة شديدة رفعنا العدد 64 للقوة الرابعة:

$64^4$

64^4

و كنا حسبنا المتوالية الهندسية هكذا ببساطة برفع عدد الخانات أو الخطوات وهي هنا 64 خانة أو خطوة و هي بالطبع عدد مربعات رقعة الشطرنج للقوة الرابعة.

إذا و ببساطة شديدة فإن المتوالية الهندسية عبارة عن عملية رفع للقوة ويتم حساب هذه المتوالية الهندسية وفقا لعاملين اثنين و هما :

مدى تكرار المتوالية : كما رأينا سابقا في مثال رقعة الشطرنج فقد كان لزاما علينا أن نكرر المتوالية الهندسية 64 مرة و هو عدد مربعات أو عدد خانات رقعة الشطرنج , أما في مثال المليونير الأمريكي فقد تم تكرار المتوالية ثلاثين مرة , و هذا العامل يمثل العدد الذي يتوجب علينا أن نرفعه لقوة معينة حتى نتمكن من حساب المتوالية الهندسية .

العامل الثاني هو معدل مضاعفة المتوالية الهندسية :و هو معدل ثابت تمثله القوة التي نرفع إليها عدد المرات التي نكرر فيها المتوالية الهندسية , و كما رأينا سابقا فقد رفعنا عدد خانات رقعة الشطرنج إلى القوة الثانية عندما طلب مخترع لعبة الشطرنج من الملك أن تتم مضاعفة حبات القمح وفقا للقوة الثانية .

■المتواليات الهندسية في الطبيعة :

يمكن القول بأن جميع الكائنات الحية تنمو وتتكاثر على شكل متوالية هندسية فكل كائن حي يبدأ حياته على شكل خلية واحدة و هذه الخلية تنقسم إلى خليتين و كل منهما تنقسم كذلك إلى خليتين إلى ان نحصل على مليارات من الخلايا التي يتألف منها الكائن الحي.

وبذلك فإننا نكون بعون الله قد أنهينا بحث المتواليات الهندسية .

## عملية الضرب المتصالب Cross-multiply

كما رأينا سابقا فإن عملية الضرب المتصالب , أي عملية الضرب على شكل حرف X تعني أن نحل معادلة كسرية عن طريق ضرب بسط الكسر الأول بمقام الكسر الثاني و مقام الكسر الأول ببسط الكسر الثاني.

مثال :

لدينا المعادلة الكسرية التالية :

$$\frac{6}{12}=\frac{4}{8}$$

4/8=6/12

4 على 8 = 6 على 12

لحل مثل هذه المعادلة الكسرية فإننا نضرب أعلى الكسر الأول بأسفل الكسر الثاني أي أننا نضرب بسط الكسر الأول بمقام الكسر الثاني, كما نضرب أسفل الكسر الأول بأعلى الكسر الثاني , أي أننا نضرب مقام الكسر الأول ببسط الكسر الثاني :

فنكتب:

6×8

12×4

6×8=12×4

و في الجبر بإمكاننا أن نجري عملية الضرب المتصالب بين المجاهيل و المتغيرات بالطريقة ذاتها :

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

نجري عملية ضرب متصالب على شكل حرف X فنضرب أعلى الكسر الأول بأسفل الكسر الثاني كما نضرب أدنى الكسر الأول بأعلى الكسر الثاني على الشكل التالي:

A×D=B×C

AD=BC

و بالطبع فإنكم تعلمون بأنه في علم الجبر عندما نضع حرفين بجانب بعضهما البعض فإننا نقصد بأن هنالك علاقة ضرب بينهما :

AC=A×C

و عندما نضع حرفا بجوار عدد أو عددا بجوار حرف فإن ذلك يعني بأن هنالك علاقة ضرب بينهما :

5C=5×C

## اللوغاريتم -Logarithms الخوارزمية

يشير اللوغاريتم إلى عدد المرات التي يجب علينا أن نضرب فيها عددا ما بنفسه حتى نحصل على رقم آخر :

Log(2)4

ما هو عدد المرات التي يجب أن نضرب بها العدد 2 حتى نحصل على العدد 4 ؟

Log(2)4=2

إن اللوغاريتم هنا هو العدد 2 .

2×2=4

Log(4)16

ما هو عدد المرات التي يجب أن نضرب فيها العدد 4 بنفسه حتى نحصل على العدد 16 ؟

Log(4)16=4

إن اللوغاريتم هنا هو العدد 4

4×4=16

Log(5)125=3

ما هو عدد المرات التي يجب أن نضرب فيها العدد 5 بنفسه حتى نحصل على العدد 125 ؟

إن اللوغاريتم هنا هو العدد 3

$5\times5\times5=125$

$Log(9)\,729=3$

ما هو عدد المرات التي يجب أن نضرب فيها العدد 9 بنفسه حتى نحصل على العدد 729 ؟

إن اللوغاريتم هنا هو العدد 3 .

$9\times9\times9=729$

مما سبق نستنتج بأن اللوغاريتم و الرفع للقوة قريبين جدا من بعضهما البعض .

فعندما نسأل أنفسنا Log(9) 729 كم هو عدد المرات التي يجب أن نضرب بها العدد 9 بنفسه حتى نحصل على 729 فإننا نسأل ما هي القوة التي يجب أن نرفع إليها العدد 9 حتى نحصل على 729 ؟

$9\times9\times9=9^3$

اللوغاريتم (الخوارزمية) و القوة التي نرفع إليها عدد ما هما تقريبا شيء واحد .

**حساب اللوغاريتم على الآلة الحاسبة :**

لحساب اللوغاريتم على الآلة الحاسبة فإننا نكتب العدد الذي نريد حساب لوغاريتم ثم ننقر الزر log

مع الانتباه إلى أن هذا الزر لا يحسب إلا الوغاريتمات التي يكون أساسها العدد عشرة.

مثال :

اكتب في الآلة الحاسبة مثلا العدد 25 ثم انقر على زر حساب اللوغاريتم log فتحصل على النتيجة التالية :

1.39794000867203760957252221055

و هذه النتيجة تعني بأن العدد عشرة مرفوعا للقوة 1.39794000867203760957252221055 يساوي 25 .

البرهان على وجود علاقة بين اللوغاريتم و الرفع للقوة:

اكتب في الآلة الحاسبة العدد 5 ثم انقر زر حساب اللوغاريتم log فتحصل على النتيجة التالية :

0.698970004336018804786261105275

إن هذا الرقم يعني بأن العدد عشرة مرفوعا للقوة

0.698970004336018804786261105275 يساوي 5 .

الآن اكتب في الآلة الحاسبة العدد 10 .

ارفع العدد عشرة للقوة :

0.698970004336018804786261105275

فتحصل على العدد 5 .

إذا فإن اللوغاريتم و الرفع للقوة هما تقريبا شيئا واحدا .

Log(4)16=2

ما هو لوغاريتم العدد 4 أي ما هي عدد المرات التي يتوجب أن تضرب بها العدد 4 حتى يصبح 16 ؟

لوغاريتم العدد 4 الذي يرفعه إلى 16 هو 2 , أي أن عدد المرات التي يتوجب علينا أن نضرب بها العدد 4 حتى نحصل على 16 هو العدد 2 .

إذا فإن لوغاريتم رفع 4 إلى 16 هو العدد 2

$4\times4=16$

و كذلك فإننا إذا رفعنا العدد 4 إلى القوة الثانية فإننا نحصل على العدد 16 :

$4\times4=4\wedge4=4^{2=16}$

$4^2=16$

| ما هو الاختلاف بين الرفع للقوة و بين اللوغاريتم ؟ |
|---|

**تخبرنا قوة عدد ما بعدد المرات التي يتوجب علينا أن نضرب عددا ما بنفسه .**

**مثال $9^5$ العدد 9 مرفوعا للقوة الخامسة يخبرنا بأن علينا أن نضرب العدد 9 بنفسه 5 مرات :**

**$9^5=9\wedge5=9\times9\times9\times9\times9=$**

**59049**

**أما اللوغاريتم فإنه يطرح السؤال التالي :**

**إلى أية قوة ينبغي أن نرفع عددا ما حتى نحصل على هذه النتيجة ؟**

**أي أن جواب مسألة اللوغاريتم هو القوة أو الأس .**

تذكر دائما بأن إيجاد الجذر التربيعي لعدد ما هو العملية المعاكسة تقريبا لعمليتي الرفع للقوة و إيجاد لوغاريتم عدد ما :

الجذر التربيعي لعدد ما هو العدد الذي إذا ضربته بنفسه تحصل على ذلك العدد .

مثال الجذر التربيعي للعدد 16 هو العدد 4 لأن :

$4\times4=16$

**إيجاد الجذر التربيعي لعدد ما باستخدام الآلة الحاسبة :**

**أدخل العدد الذي تريد إيجاد جذره التربيعي و ليكن مثلا العدد 16 .**

**اضغط زر إيجاد الجذر√.**

**فتحصل على النتيجة 4 .**

يوجد في الآلة الحاسبة زرين يؤديان مهمتين متعاكستين وهما زر إيجاد الجذر التربيعي √ و زر الرفع للقوة الثانية $X^2$ :

ادخل العدد 100 مثلا إلى الآلة الحاسبة .

اضغط زر إيجاد الجذر التربيعي √.

ستحصل على النتيجة 10 .

الآن سنقوم بعمل معاكس:

ندخل العدد 10 إلى الآلة الحاسبة.

نضغط زر الرفع إلى القوة $X^2$

تذكر دائما :

عندما تضرب الجذر التربيعي لعدد ما بنفسه فإن النتيجة تكون العدد ذاته .

مثال :

الجذر التربيعي للعدد 16 ضرب الجذر التربيعي للعدد 16 يساوي 16

$\sqrt[2]{16}\times\sqrt[2]{16}=16$

لماذا؟

لأننا عندما نضرب االجذر التربيعي لعدد ما بنفسه فإن ذلك يشبه قيامنا بضرب العدد الذي إذا ضربناه بنفسه ينتج ذلك العدد .

و بشكل أوضح فإنني عندما ضربت الجذر التربيعي للعدد 16 بنفسه فإنني في الحقيقة لم أكن أضرب العدد 16 بنفسه و إنما كنت أضرب العدد 4 بنفسه على اعتبار أن العدد 4 هو الجذر التربيعي √ للعدد 16.

إذا فإن :

$\sqrt[2]{16}\times\sqrt[2]{16}=4\times4=16$

حاول أن تضرب الجذر التربيعي لأعداد أخرى بنفسها لتتبين بأن ضرب الجذر التربيعي بنفسه يعطي العدد ذاته .

$\sqrt[2]{100} \times \sqrt[2]{100} = 100$

الجذر التربيعي للعدد 100 ضرب الجذر التربيعي للعدد 100 يساوي 100 .

$\sqrt[2]{100} \times \sqrt[2]{100}$

$10 \times 10 = 100$

لأن الجذر التربيعي للعدد 100 هو العدد 10 و نحن عندما نضرب الجذر التربيعي للعدد 100 بنفسه فكأنما نضرب العدد 10 بنفسه على اعتبار أن العدد 10 هو الجذر التربيعي للعدد 100.

**كيف نضرب الجذر التربيعي لعدد ما بالجذر التربيعي لعدد آخر باستخدام الآلة الحاسبة ؟**

**لنفترض بأنني أريد أن أضرب الجذر التربيعي للعدد 75 بالجذر التربيعي للعدد 75 :**

**أدخل العدد 75 إلى الآلة الحاسبة .**

**اضغط زر إيجاد الجذر التربيعي √.**

**اضغط زر عملية الضرب × أو زر النجمة .**

**أدخل العدد 75 إلى الآلة الحاسبة .**

**اضغط زر إيجاد الجذر التربيعي √.**

**أضغط زر المساواة =**

يمكنك أن تضرب الجذر التربيعي لعدد ما بنفسه بطريقة ثانية :

لنفترض بأنني أريد أن أضرب الجذر التربيعي للعدد 44 بنفسه :

أدخل العدد 44 إلى الآلة الحاسبة .

اضغط زر إيجاد الجذر التربيعي √.

اضغط زر الرفع للقوة $X^Y$ .

اضغط زر العدد 2 حتى تعلم الآلة الحاسبة بأنك تريد رفع جذر العدد 44 إلى القوة الثانية.

اضغط زر المساواة =

ملاحظة : يمكن أن يكون زر الرفع للقوة على الشكل ^.

بالطبع فإننا عندما نرفع الجذر التربيعي لعددما إلى القوة الثانية فإن ذلك يماثل قيامنا بضرب الجذر التربيعي لذلك العدد بنفسه.

تذكر دائما :

عندما تضرب الجذر التكعيبي لعدد ما بنفسه ثلاث مرات فإن النتيجة تكون العدد ذاته .

مثال :

الجذر التكعيبي للعدد 8 ضرب الجذر التكعيبي للعدد 8 ضرب الجذر التكعيبي للعدد 8 يساوي 8

$$8=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}$$

إذا أتاك سؤال في امتحان يطلب منك إيجاد ناتج عملية مشابهة للعملية السابقة فما عليك إلا أن تضع العدد نفسه كنتيجة.

لماذا؟

لأننا عندما نضرب الجذر التكعيبي لعدد ما بنفسه ثلاث مرات فإن ذلك يشبه قيامنا بضرب العدد الذي إذا ضربناه بنفسه ثلاث مرات فإنه ينتج ذلك العدد .

و بشكل أوضح فإنني عندما ضربت الجذر التكعيبي للعدد 8 بنفسه ثلاث مرات فإنني في الحقيقة لم أكن أضرب العدد 8 بنفسه و إنما كنت أضرب العدد 2 بنفسه على اعتبار أن العدد 2 هو الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{}$ للعدد 8.

إذا فإن :

$$8=2\times2\times2=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{8}$$

حاول أن تضرب الجذر التكعيبي لأعداد أخرى بنفسها ثلاث مرات لتتبين بأن ضرب الجذر التكعيبي بنفسه ثلاث مرات يعطي العدد ذاته.

**كيف نضرب الجذر التكعيبي لعدد ما بالجذر التكعيبي لعدد آخر ثلاث مرات باستخدام الآلة الحاسبة؟**

**لنفترض بأنني أريد أن أضرب الجذر التكعيبي للعدد 33 بالجذر التربيعي للعدد 33 ثلاث مرات :**

**أدخل العدد 33 إلى الآلة الحاسبة .**

**اضغط زر إيجاد الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{}$.**

**اضغط زر عملية الضرب × أو زر النجمة.**

**أدخل العدد 33 إلى الآلة الحاسبة .**

**اضغط زر إيجاد الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{}$.**

**اضغط زر عملية الضرب × أو زر النجمة.**

أدخل العدد 33 إلى الآلة الحاسبة .

اضغط زر إيجاد الجذر التكعيبي $\sqrt{}^3$.

أضغط زر المساواة =

يمكنك أن تضرب الجذر التكعيبي لعدد ما بنفسه ثلاث مرات بطريقة ثانية :

لنفترض بأننا نريد أن نضرب الجذر التكعيبي للعدد 22 بنفسه ثلاث مرات :

ندخل العدد 22 إلى الآلة الحاسبة .

نضغط زر إيجاد الجذر التكعيبي $\sqrt{}^3$.

نضغط زر الرفع للقوة $X^Y$ .

نضغط زر العدد 3 حتى تعلم الآلة الحاسبة بأننا تريد رفع الجذر التكعيبي للعدد 22 إلى القوة الثالثة أي أننا نريد أن نضربه بنفسه ثلاث مرات.

نضغط زر المساواة =

بالطبع فإننا عندما نرفع الجذر التكعيبي لعدد ما إلى القوة الثالثة فإن ذلك يماثل قيامنا بضرب الجذر التكعيبي لذلك العدد بنفسه ثلاث مرات.

$4^{-1}$ مرفوعة للقوة ناقص واحد $4 = 0.25 = \frac{1}{4}$

□ بالنسبة للتعامل مع الأرقام الفلكية و حتى لا تضطر لإدخالها بشكل يدوي فإن بإمكانك إذا كنت تستخدم الآلة الحاسبة الموجودة في نظام ويندوز أن تقوم بنسخ و لصق النتيجة باستخدام قائمة التحرير edit عن طريق الأمرين نسخ copy و لصق paste .

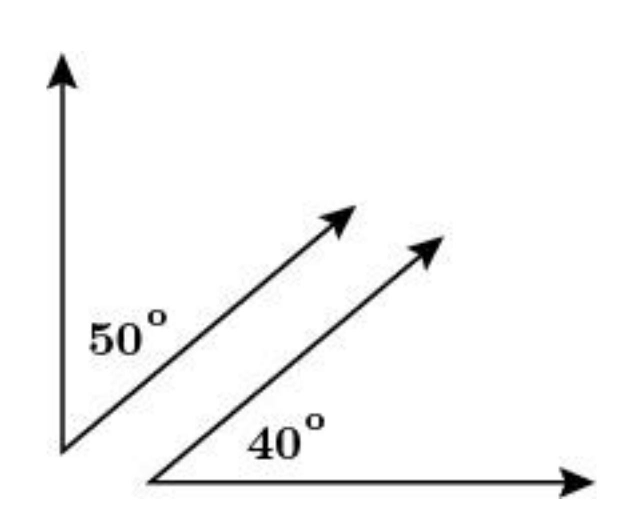
كما هي الحال بالنسبة للرفع للقوة السالبة فإن هنالك لوغاريتمات سالبة Negative Logarithms

# مدخل إلى الهندسة

الكائن الأول في علم الهندسة هو النقطة ,ومن الناحية الهندسية فإن النقطة لا تحتل أي حيز مكاني : النقطة لا تشغل أي مكان و ليس لها أي أبعاد و إلا فإنها لا تكون نقطة بل ستكون شيئا آخر : دائرة مثلا.

□ إذا رسمت نقطة و أردت تسميتها بحرف إنكليزي فإن عليك أن تستخدم دائما الأحرف الكبيرة.

أما الخط من الناحية الهندسية فإنه عبارة عن تجمع عدد لا نهائي من النقاط وهو يمتد بشكل لا نهائي في كلا الاتجاهين , و ليس للخط أية أبعاد : ليس له عرض ولا ارتفاع و إلا فإنه لا يكون خطا و إنما يكون شيئا آخر: مستطيل أو اسطوانة مثلا...



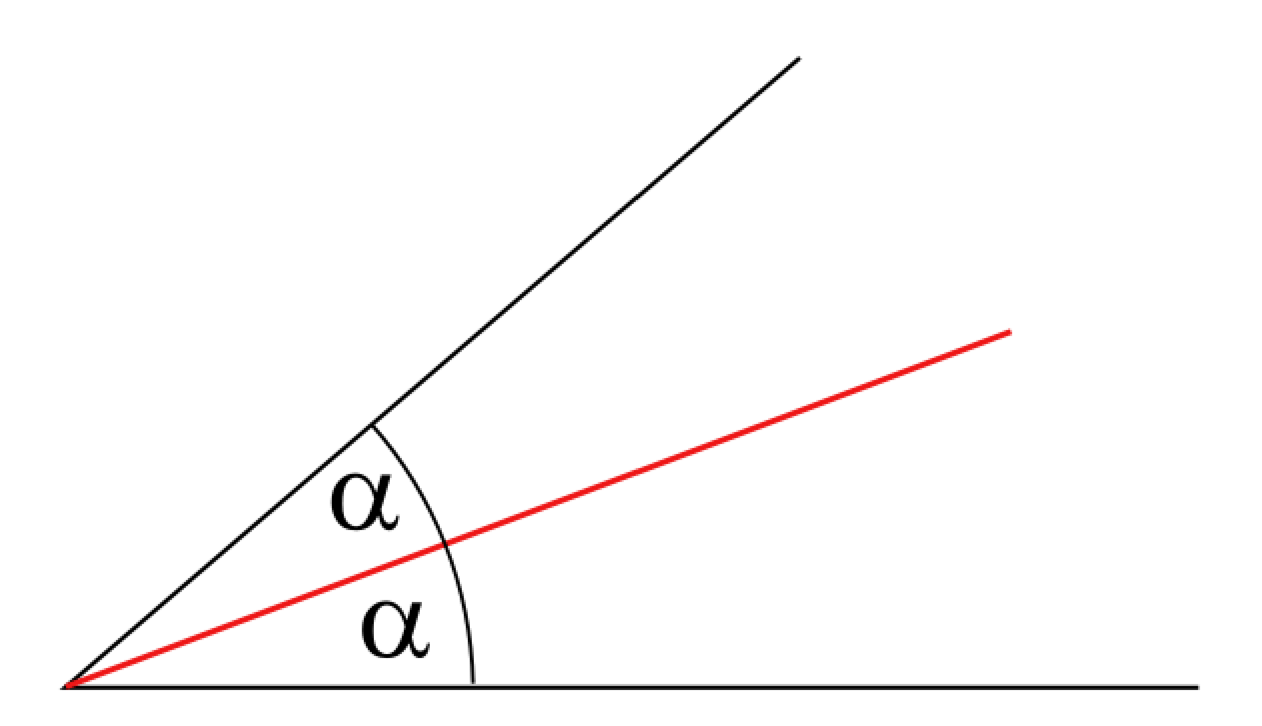

□ يقال عن زاويتين بأنهما متكاملتين complementary إذا كان قياسهما سويا 90 درجة , ولذلك نستطيع أن نحسب الزاوية المكملة لأية زاوية بطرح قيمة تلك الزاوية من 90 درجة.

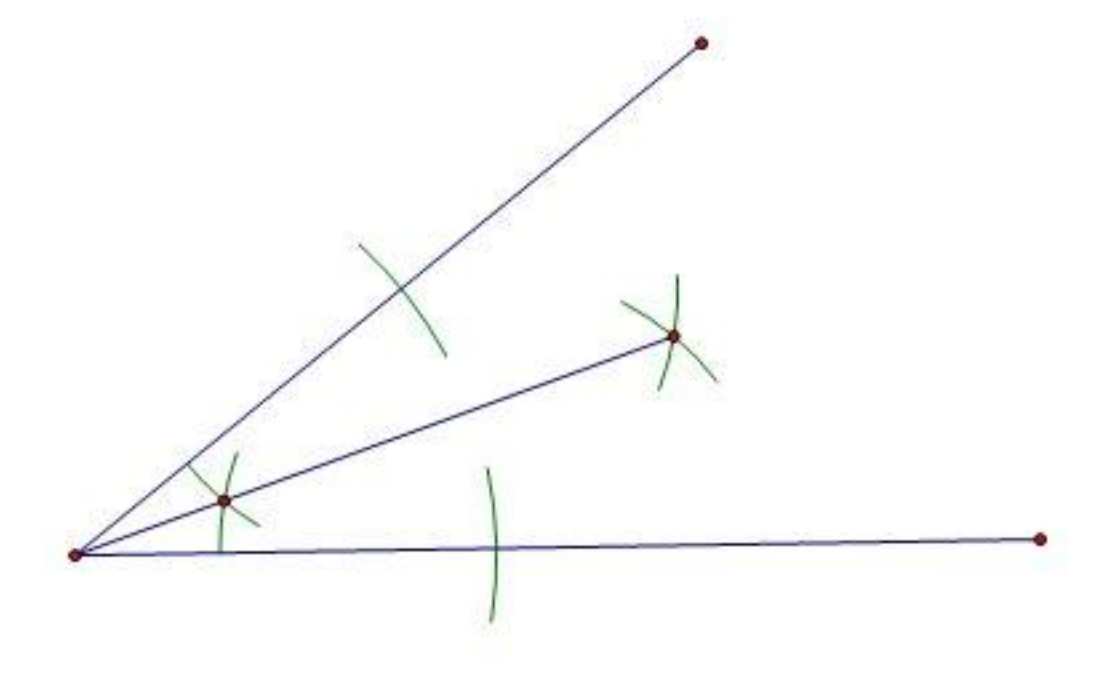
ما هي الزاوية المكملة للزاوية 30 درجة؟

$90-30=60$

إذا فإن الزاوية المكملة لزاوية مقدارها 30 درجة هي زاوية مقدارها 60 درجة :

30+60=90





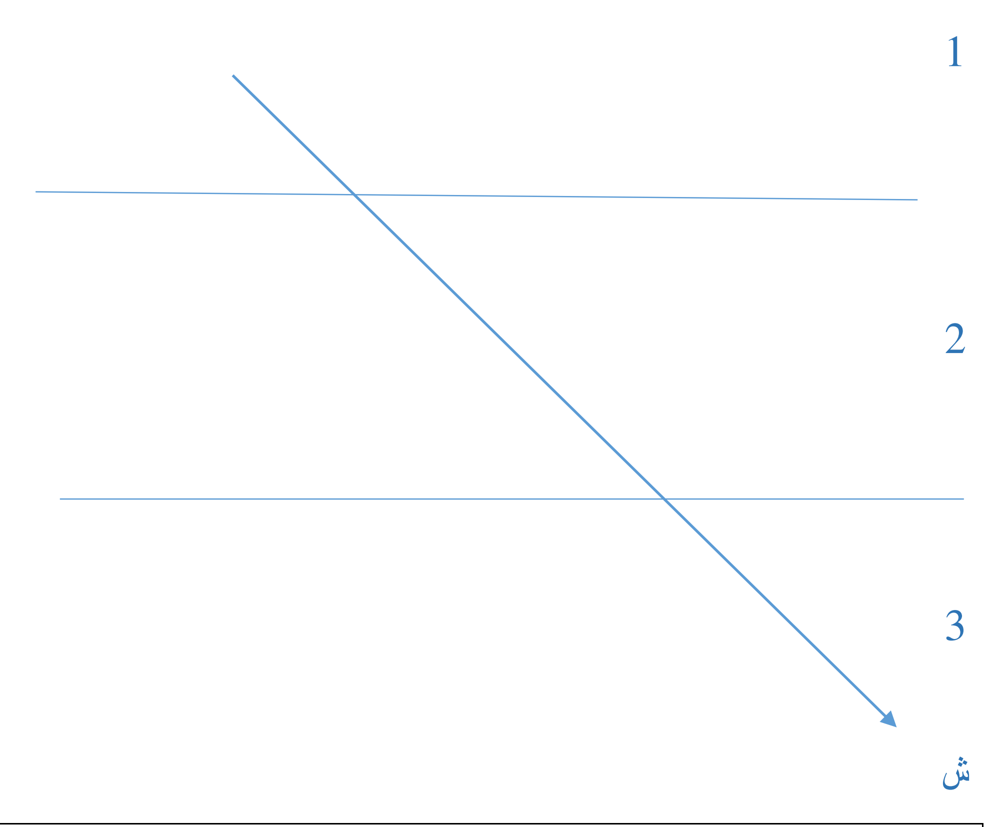
□ منصف الزاوية Angle bisector : عبارة عن شعاع ينشأ من رأس الزاوية أو ذروة الزاوية vertex و ينصفهما إلى زاويتين متطابقتين.

### □ قاعدة هندسية :

عندما يتقاطع مستقيمان مع بعضهما البعض فإنهما يصنعان 4 زوايا و إذا كانت إحدى تلك الزوايا التي يصنعها هذين المستقيمان في تقاطعهما زاوية قائمة يبلغ قياسها 90 درجة فإن جميع الزوايا الثلاثة الأخرى يجب أن تكون زوايا قائمة : أي يجب أن يكون قياس كل منها 90 درجة.

□ قاعدة هندسية :

عندما يتقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين بهذا الشكل ≠ تتشكل نتيجة هذا التقاطع 8 زوايا و في هذه الحالة فإن كل زاويتين متقابلتين غير متجاورتين ولا تشتركان بأي ضلع و تتقابلان بالرأس يكون قياسهما واحدا.



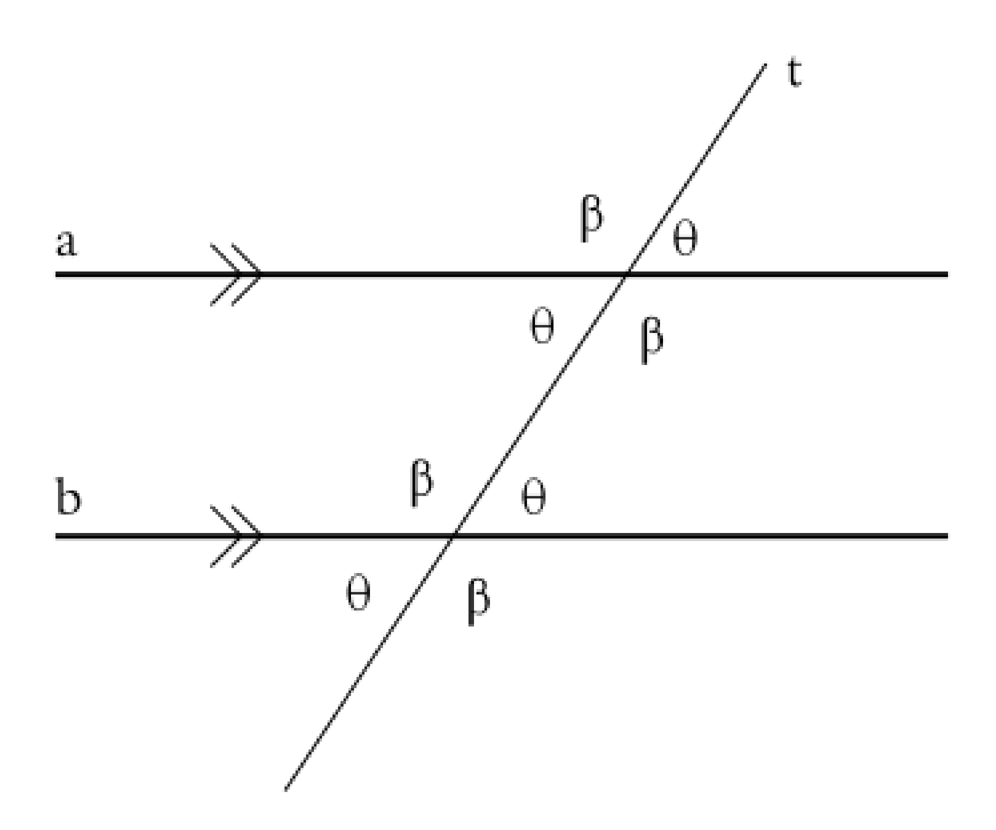

عندما يخترق مستقيم مائل ممستعرض مستقيمين متوازيين تتشكل 8 زوايا و عندها فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متطابقتين و ذات قياس واحد.

□ يصنع المستقيم الذي يتقاطع بزاوية مائلة مع مستقيمين متوازيين أربع زوايا خارجية تقع خارج المستقيمين المتوازيين و أربع زوايا داخلية تقع ضمن المستقيمين المتوازيين.

□ تكون أربعة من هذه الزوايا حادة قياسها أقل من 90 درجة بينما تكون أربعة من تلك الزوايا منفرجة قياسها أكبر من 90 درجة و تكون الزوايا الحادة متقابلة مع بعضها بالرأس بينما تكون متجاورة بضلع مع الزوايا المنفرجة و تكون الزوايا المنفرجة متقابلة مع الزوايا المنفرجة بالرأس بينما تكون متجاورة مع الزوايا الحادة بضلع مشترك.

□ تكون الزوايا الحادة متطابقة مع بعضها أي لها القياس ذاته بينما تكون الزوايا المنفرجة متطابقة مع بعضها البعض.

□ كل زاويتين متجاورتين (بينهما ضلع مشترك) تكون إحداهما حادة بينما تكون الثانية منفرجة و يجب أن يبلغ قياسهما سويا 180 درجة .



□ إذا عرفنا قياس زاوية واحدة فقط من الزوايا الثمانية التي يصنعها مستقيم معترض عندما يقاطع مستقيمين متوازيين فإن بإمكاننا أن نعرف قياس الزوايا السبع المتبقية كلها .لماذا؟

لأن كل زاويتين متجاورتين تكون إحداهما حادة قياسها أقل من 90 درجة بينما تكون الزاوية الأخرى منفرجة قياسها أكبر من 90 درجة , و يجب أن يكون قياسهما سويا 180 درجة .

و بما أن جميع الزوايا الحادة الأربعة في هذا الشكل تكون زوايا متطابقة ذات قياس واحد , و بما أن جميع الزوايا المنفرجة في هذا الشكل تكون زوايا متطابقة كذلك و ذات قياس واحد فإننا إذا عرفنا قياس زاوية واحدة و لتكن مثلا إحدى الزوايا المنفرجة و ليكن قياسها 130 درجة مثلا فإننا سنعلم بأن جميع الزوايا الثلاثة المنفرجة الأخرى في الشكل قياسها 130 درجة كذلك و لذلك فإن:

180-130=50

180 و هو مجموع قياس زاوية منفرجة مع زاوية حادة ناقص 130 درجة و هو قياس الزاوية المنفرجة التي عرفنا قياسها يساوي 50 درجةو هو قياس الزاوية الحادة أو هو قياس جميع الزوايا الحادة في هذا الشكل ذلك لأن هذا المسنقيم المعترض يصنع 4 زوايا حادة و 4 زوايا منفرجة.

و في هذا الشكل فإن كل زاويتين متجاورتين _يفصل بينهما المستقيم المعترض - تكون إحداهما حادة بينما تكون الثانية منفرجة و يكون قياسهما معا 180 درجة فإذا علمت قياس إحداهما فإنك ستعلم قياس الثانية حكما لأن كل الزوايا الحادة في هذا الشكل متطابقة و ذات قياس واحد و كذلك فإن كل الزوايا المنفرجة في هذا الشكل متطابقة و ذات قياس واحد.

# مدخل إلى حساب المثلثات

□ حتى تحصل على أي شكل هندسي مغلق فإنك تحتاج إلى ثلاثة أضلاع على أقل تقدير.

**□ إن مجموع زوايا أي مثلث هو 180 درجة.**

**□ في المثلث القائم الزاوية يكون لدينا زاوية قائمة قياسها 90 درجة و زاويتين أخريين يجب أن يكون قياسهما سويا كذلك 90 درجة . لماذا؟**

**لأن مجموع زوايا المثلث الثلاثة يجب أن يكون 180 درجة.**

فإذا علمنا مجموع زاويتين من زوايا أي مثلث يصبح من اليسير علينا معرفة قياس الزاوية الثالثة, فإذا كان مجموع زوايا زاويتين من زوايا مثلث ما 150 درجة مثلا فإن زاويته الثالثة يجب أن يكون قياسها 30 درجة.

180-150=30

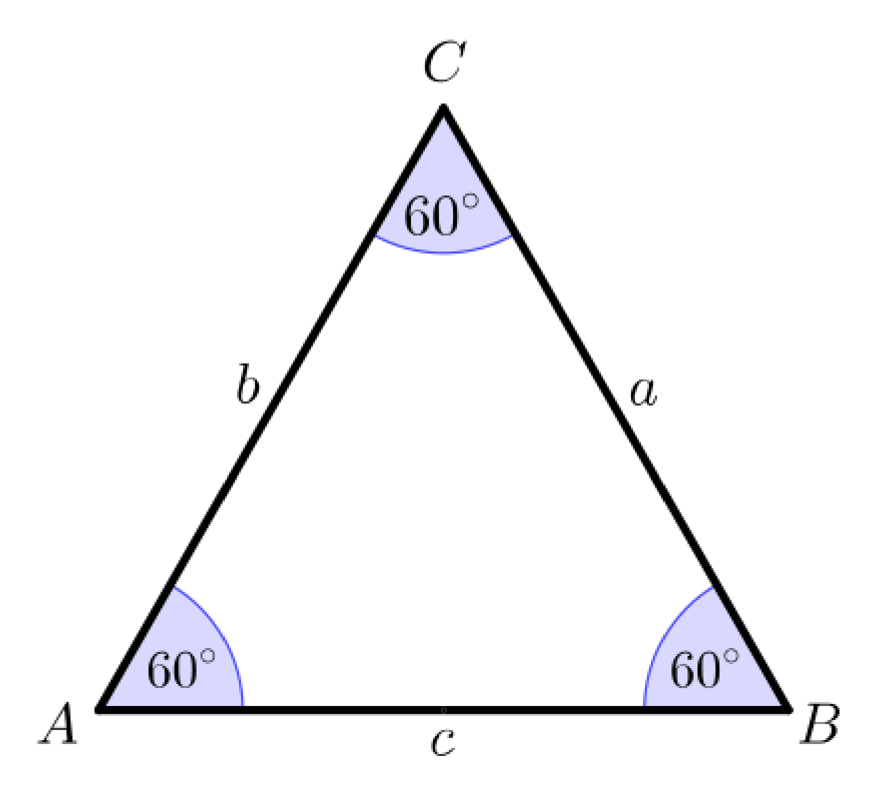
أنتم تعلمون بأن مجموع زوايا أي مثلث يجب أن يكون 180 درجة فإذا علمنا بأن مجموع اثنتين من زواياه يبلغ 150 درجة علمنا بأن زاويته الثالثة يبلغ قياسها 30 درجة و ذلك بطرح 150 من 180.

□ يكون أطول ضلع في المثلث دائما مقابلا لأكبر زاوية , و كلما كانت الزاوية أكثر انفراجا و اتساعا كان الضلع المقابل لها أكثر طولا:

إذا كانت إحدى زوايا مثلث ما منفرجة –قياسها أكبر من 90 درجة– فإن أطول ضلع في ذلك المثلث يجب أن يكون حتما الضلع المقابل لتلك الزاوية .

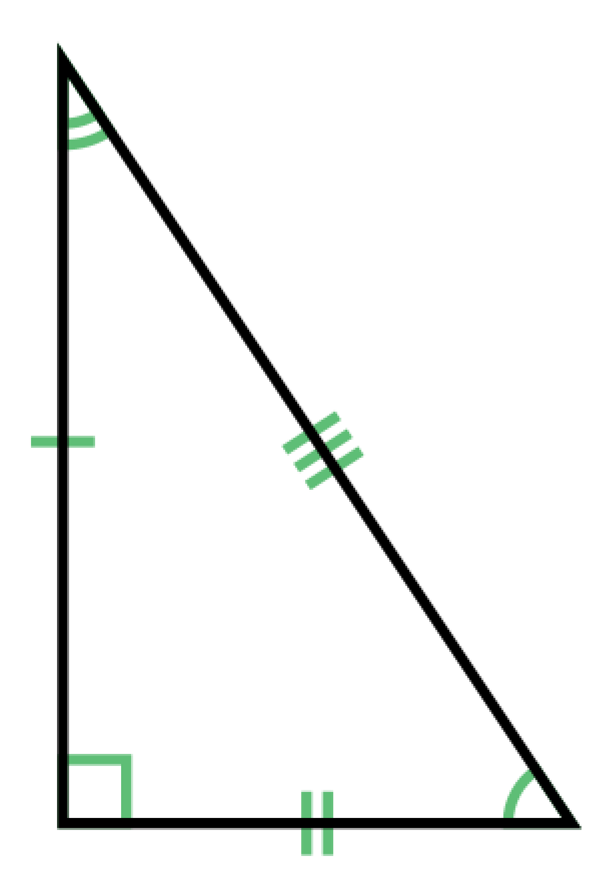
و في المثلث القائم الذي يحوي زاوية قائمة قياسها 90 درجة فإن أطول ضلع يجب أن يكون الضلع المقابل و المواجه لتلك الزاوية القائمة و هذا الضلع يدعى بالوتر.

□ في المثلث يكون أقصر ضلع من أضلاعه هو الضلع المقابل لأصغر زواياه و كلما كانت الزاوية أكثر ضيقا كان الضلع المقابل لها أكثر قصرا.




□ في المثلث المتساوي الساقين يكون لدينا زاويتين متطابقتين لهما القياس ذاته و يقابلهما ضلعين متساوين كذلك في القياس .

□ **إذا احتوى المثلث زوايا متطابقة congruent angles أي زوايا ذات قياس واحد فإن الأضلاع المقابلة لتلك الزوايا تكون كذلك متساوية في الطول مع بعضها البعض.**



□ يتميز المثلث غير المتساوي الأضلاع scalene بأن زواياه كذلك غير متطابقة و غير متساوية .

scalene ['skeɪlɪ:n] مثلث غير متساوي الأضلاع سكيلين

□ يتميز المثلث المتساوي الأضلاع بأن أطوال أضلاعه الثلاثة تكون متساوية و كذلك فإن زواياه الثلاثة كذلك تكون متطابقة أي أنها تكون متساوية في القياس مع بعضها البعض.

triangle **equilateral** مثلث متساوي الأضلاع.

---

□ يتميز المثلث المتساوي الأضلاع بأن أطوال أضلاعه الثلاثة تكون متساوية كما يتميزكذلك بأن زواياه تكون متطابقة أي أن قياس زواياه الثلاث يكون متطابقا لأن هنالك تناسبا ما بين طول الضلع في المثلث و قياس الزاوية المقابلة له فإذا كانت أطوال أضلاع مثلث ما متساوية وجب حتما أن تكون زواياه متطابقة كذلك و متساوية في القياس مع بعضها البعض.

و بما أن مجموع قياس أي مثلث لابد أن يكون 180 درجة فإن قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع يجب أن يكون 60 درجة حتما .

لماذا؟

لأنه للمثلث ثلاث زوايا و لأن مجموع زوايا المثلث يجب أن يكون 180 درجة و لأن زوايا المثلث المتساوي الأضلاع هي كذلك متطابقة ومتساوية في القياس إذا :

$180 \div 3 = 60$

180 درجة هو مجموع قياس زوايا أي مثلث تقسيم ثلاث زوايا يساوي 60 درجة قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع.

---

□ إذا قيل لنا في امتحان الهندسة بأنه لدينا مثلث متساوي الأضلاع و أن قياس إحدى زواياه أكبر أو أقل من 60 درجة فإن هذا يعني أحد شيئين باطلين و غير ممكنين :

الأول أن يكون مجموع قياس زوايا هذا المثلث أقل أو أكبر من 180 درجة و هو أمر مستحيل الحدوث بالنسبة لأي مثلث.

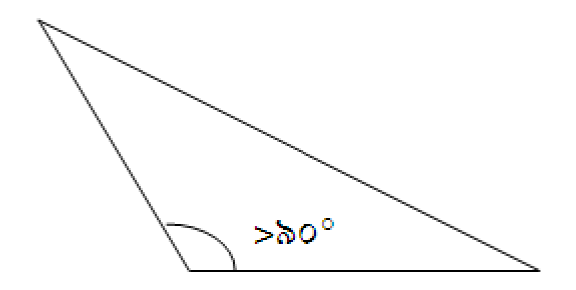
الثاني أن يكون هذا المثلث غير متطابق الزوايا و هو أمر ينافي الفرض.

□ إذا احتوى المثلث زاية منفرجة وهي الزاوية التي يكون قياسها أكبر من 90 درجة فإنه يدعى بالمثلث المنفرج .

---

/-'tju [ob·tuse || əb'tu:s [-Obtuse زاويــة منـفـرجة -
أوبـتـيـوس -أوبـتـوس

Obtuse triangle مثلث منفرج الـزاويـة.

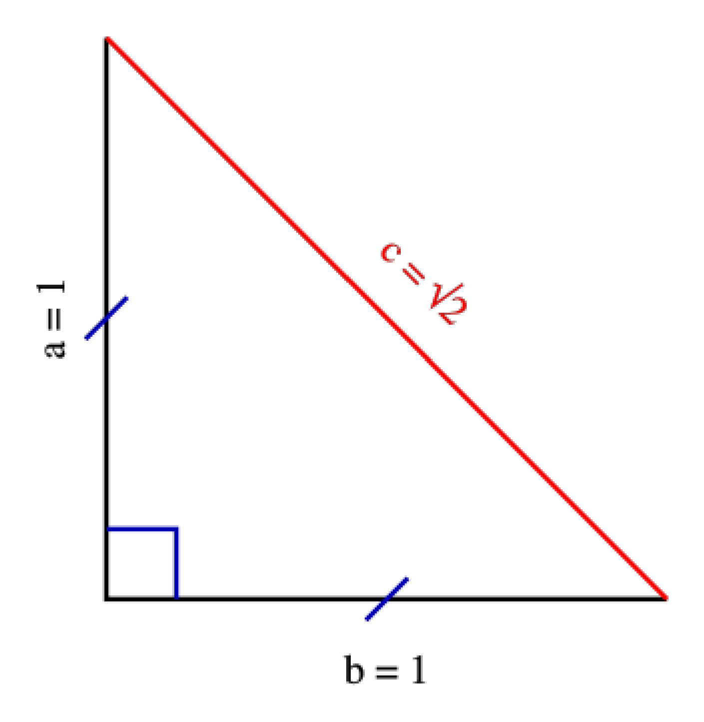



□ يـقـع ارتـفـاع الـمـثـلـث الـمنـفـرج الـزاويـة خارج الـمثلث :
ارتـفـاع الـمثـلـث هو الـخـط الـوهـمي الـذي يـصل بـيـن أعـلـى نـقـطة فـيـه
و بـيـن قـاعدتـه (الأرض).

□ إذا احـتـوى الـمثـلـث عـلـى زاويـة قـائـمة (زاويـة مربـعـة) وهي
الـزاويـة الـتـي قـيـاسها 90 درجة فـإنـه يـدعى بـالـمثـالـث الـقـائـم.

Right triangle مثلث قـائـم .

---




□ لا يمكن أن يكون للمثلث المنفرج الزاوية إلا زاوية واحدة منفرجة ولا يمكن أن يكون للمثلث القائم الزاوية إلا زاوية واحدة قائمة .

□ من المستحيل أن يحتوي أي مثلث على أكثر من زاوية واحدة قياسها 90 درجة أو أكثر .

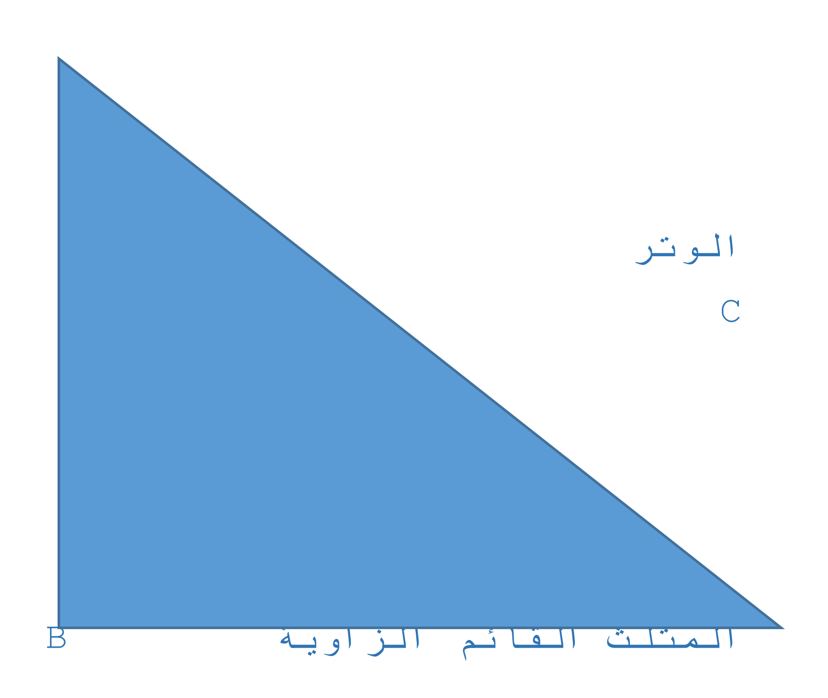
□ في المثلث القائم الزاوية يدعى الضلعين الذين يشكل التقائهما و تعامدهما زاويته القائمة بالساقين أما الضلع الذي يقابل زاويته القائمة فإنه يدعى بالوتر و هو أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية .

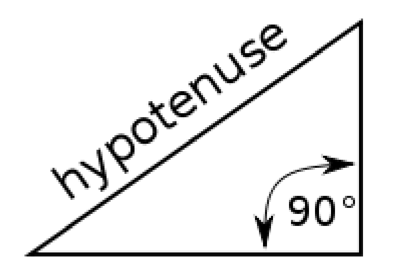
لماذا ؟

لأن وتر المثلث يكون مواجها لأكبر زوايا المثلث القائم و هي بالطبع الزاوية القائمة التي يبلغ قياسها 90 درجة لأنه من المستحيل أن يجتوي أي مثلث على أكثر من زاوية واحدة قياسها 90 درجة أو أكثر .

---

[hypotenuse [haɪ'pɑtənuːz /-'pɒtənjuːz وتر المثلث :
هايبوتانوز - هايبوتانيوز : وتر المثلث القائم الزاوية
و هو الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة في ذلك المثلث.




---

## □ نظرية فيثاغورس في المثلث القائم الزاوية The Pythagorean Theorem

---

في المثلث القائم الزاوية ,وهو بالطبع المثلث الذي يحتوي على زاوية قائمة قياسها 90 درجة , يكون مربع طول وتر ذلك المثلث مساويا لمجموع مربعي طول ضلعيه الآخرين .

طريقة لتذكر نظرية فيثاغورث : إذا قلنا بأن ساق المثلث القائم الزاوية الأول هو A و ساقه الثانية هو B فإن وتره يكون C و بالتالي فإن:

C^2=A^2+B^2

$C^2=B^2+A^2$

مربع طول وتر المثلث القائم الزاوية = مربع طول الضلع الأول + مربع طول الضلع الثاني.

مثال :

مثلث يبلغ طول ضلعه الأول 10cm سنتيمتر و يبلغ طول ضلعه الثاني 8cm سنتيمتر فكم يبلغ طول وتره ؟

نطبق نظرية فيثاغورث فنقول :

مربع طول الضلع الأول +مربع طول الضلع الثاني= مربع طول الوتر.

10^2+8^2 = مربع طول الوتر

$=10^2+8^2$ مربع طول الوتر

100+64=164

□ انتبه جيدا إلى أن 164 هو مربع طول الوتر و ليس طول الوتر .

و الآن لمعرفة طول وتر هذا المثلث بالسنتيمتر فإننا نعكس عملية تربيع طول الوتر أي أننا نستخرج الجذر التربيعي للعدد 164 و هو مربع طول الوتر فنقول بأن الجذر التربيعي للعدد 164 يساوي تقريبا 12 أي أن طول وتر هذا المثلث يبلغ 12 سنتيمتر تقريبا .

كيف أحسب مربع عدد ما باستخدام الآلة الحاسبة ؟

□ اكتب بأزرار الآلة الحاسبة العدد الذي أريد رفعه لقوة معينة .

□ اضغط زر الرفع للقوة وهو الزر ^ أو الزر $X^Y$ .

□ اكتب العدد الذي يمثل القوة التي أريد رفع ذلك العدد إليها .

□ أضغط زر المساواة.

---

□ **حساب الجذر التربيعي لعدد ما باستخدام الآلة الحاسبة :**

□ **اكتب بأزرار الآلة الحاسبة الرقم الذي أريد أن أحسب جذره التربيعي.**

□ **أضغط زر حساب جذر عدد ما √**

**أحصل على النتيجة .**

لنفترض بأننا نعرف طول وتر مثلث قائم الزاوية و نعرف طول أحد أضلاعه و لكننا نجهل طول ضلعه الآخر فكيف نحسب ذلك الضلع ؟

إننا نستخدم نظرية فيثاغورث : $C^2=A^2+B^2$

مربع طول و تر المثلث القائم يساوي مربع طول ضلعه الأول + مربع طول ضلعه الثاني .

نعوض بالأعداد : لنفترض بأن مربع طول وتر مثلث قائم الزاوية يبلغ $20^2$ و أن مربع طول ضلعه الأول يبلغ $10^2$ فيكون مجهول المعادلة هو $B^2$ أي مربع الضلع الثالث فنكتب :

$10^2+B^2=20^2$

10^2+B^2=20^2

---

مربع طول الضلع الأول 10 مرفوعا للقوة الثانية زائد مربع طول الضلع الثاني B مرفوع للقوة الثانية وهو هنا مجهول يساوي مربع طول الوتر أي 20 مرفوعة للقوة الثانية .

إذا لدينا هنا معادلة تحوي مجهولا واحدا هو B مرفوعا للقوة الثانية كما أنها تحوي عملية جمع , و كما مر معنا سابقا فإن حل المعادلات يتطلب منا أن نعكس العملية الأصلية أي أننا نحول عملية الجمع إلى عملية طرح فنكتب :

20∧2-10∧2=B∧2

$20^2-10^2=B^2$

$20^2=400$

$100=10^2$

أي أن $B^2$ أي مربع طول الضلع الثاني يساوي

400-100=300

□ انتبه دائما إلى أن النتيجة التي نحصل عليها عند تطبيق نظرية فيثاغورث تمثل مربع طول الضلع أو مربع طول الوتر و للحصول على الطول الحقيقي للوتر أو الضلع فإننا نفكك التربيع اي أننا نجري عملية معاكسة لعملية الرفع للقوة الثانية و هذه العملية المعاكسة لعملية الرفع للقوة الثانية هي عملية إيجاد الجذر التربيعي فنكتب :

$\sqrt{300}=17$ تقريبا

الجذر التربيعي للعدد 300 يساوي تقريبا 17 , أي أن طول الضلع يساوي تقريبا 17 سنتيمتر .

□ تذكرة : عملية إيجاد الجذر التربيعي √ لعدد ما هي العملية المعاكسة لعملية الرفع للقوة الثانية .

□ لإيجاد الجذر التربيعي لعدد ما باستخدام الآلة الحاسبة :

□ نكتب بأزرار الألة الحاسبة العدد الذي نريد حساب جذره .

□ نضغط زر حساب الجذر √

فنحصل على النتيجة .

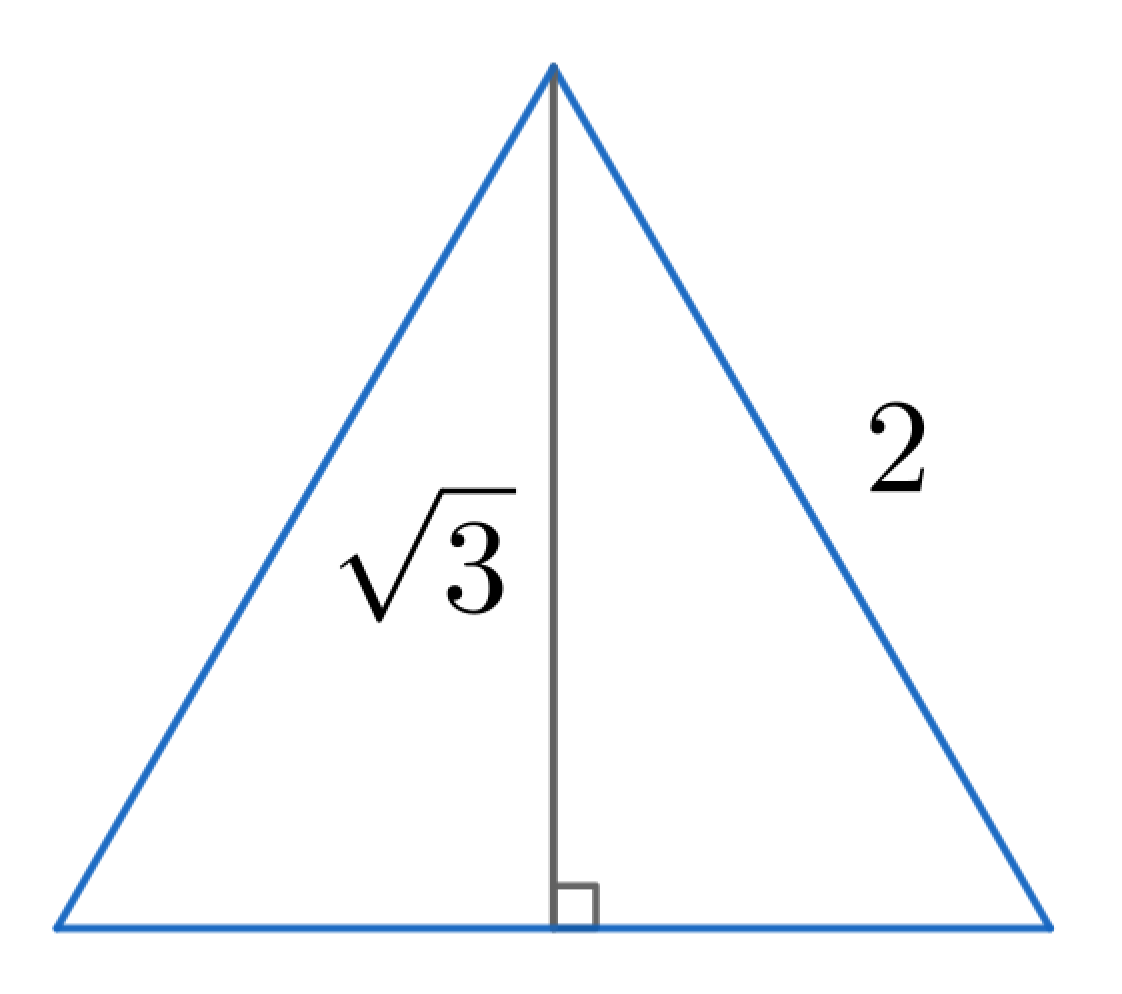
## المثلث المتساوي الأضلاع Equilateral Triangle

تكون قياسات زوايا المثلث المتساوي الأضلاع متساوية و متطابقة كذلك :

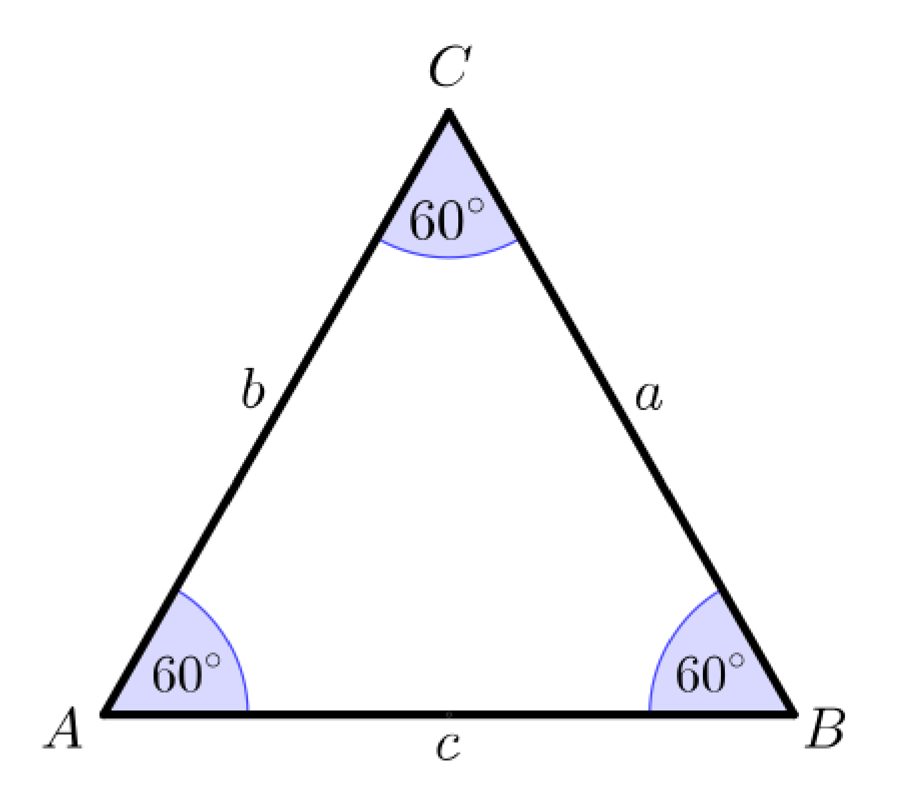
60-60-60

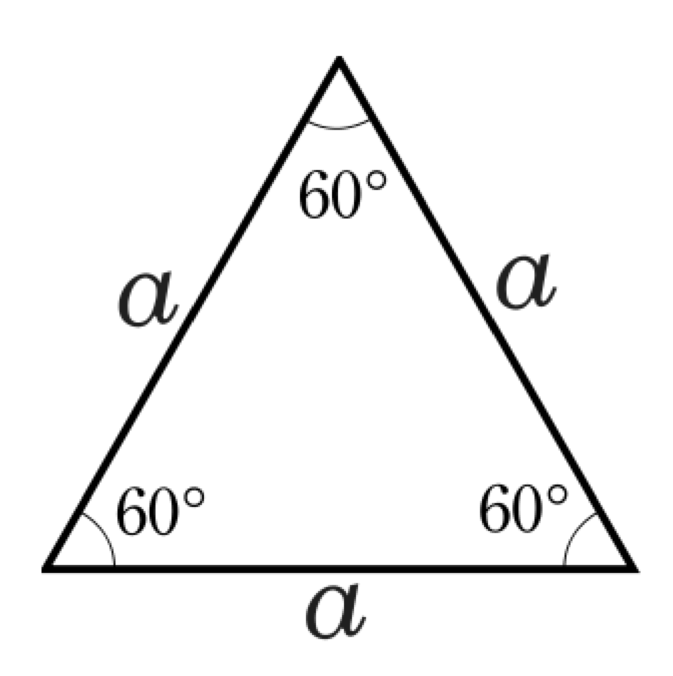
60+60+60=180

أي أن قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع تبلغ 60 درجة .



$\sqrt{3}$
2


C
60°
b
a
60°
60°
A
c
B


60°
a
a
60°
60°
a

إذا رسمنا منصفا داخليا لمثلث متساوي الأضلاع يمتد من رأسه إلى قاعدته و يقسمه إلى نصفين فإننا نحصل على مثلثين متطابقين تماما و كلا هذين المثلثين يكونان مثلثين قائمين متطابقين كذلك , كما أن كل مثلث من هذين المثلثين القائمين يحوي زاوية قائمة قياسها 90 درجة , و هذه الزاوية القائمة تمثل نقطة تعامد الخط المنصف للمثلث مع القاعدة و

**يكون قياس زوايا كل مثلث من هذين المثلثين 90-60-30 :**

لأن هذا المثلث يحوي زاوية قائمة قياسها 90 و هذه الزاوية تمثل نقطة تعامد الخط المنصف الذي يقسم المثلث إلى نصفين متطابقين مع قاعدة المثلث .

و يحوي كل مثلث من هذين المثلثين كذلك على زاوية جانبية قياسها 60 درجة و هي الزاوية التي بقيت كما هي من المثلث الأصلي المتساوي الأضلاع الذي قسمناه إلى مثلثين متطابقين ,

**وكما تعلمون فإن قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع الثلاثة يجب أن يكون 60 درجة ,لماذا؟**

**لأن هنالك تناسبا ما بين طول أضلاع المثلث و بين قياس زواياه فإذا كان المثلث متساوي الأضلاع أي إذا كانت أطوال جميع أضلاع المثلث متساوية فيجب حتما أن تكون زواياه متساوية و متطابقة كذلك إذا علمنا بأن للمثلث ثلاث زوايا طبعا و إذا علمنا بأن مجموع قياس زوايا أي مثلث يجب أن يكون 180 درجة فكان لزاما أن يكون قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع 60 درجة حكما لأن :**

**$180 \div 3 = 60$**

**$60 \times 3 = 180$**

و في كل نصف من نصفي المثلث المتساوي الأضلاع يجب أن تكون هنالك زاوية حادة قياسها 30 درجة . لماذا؟

لأن الخط المنصف الذي قسم المثلث المتساوي الأضلاع إلى شطرين و الذي مر من رأس زاوية المثلث المتساوي الأضلاع إلى قاعدته و هذا الخط قد نصف زاوية المثلث المتساوي الأضلاع إلى زاويتين متطابقتين قياس كل منهما 30 درجة .

لماذا؟

لأن قياس الزاوية في المثلث الأصلي المتساوي الأضلاع يبلغ 60 درجة و عندما مر من منتصفها العمود المنصف فإنه قد قسمها إلى زاويتين متطابقتين قياس كل منهما 30 درجة .

60÷2=30

30+30=60

و بذلك يكون قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع 60 درجة و يكون قياس زواياه الثلاثة :

60-60-60

أما قياس زوايا كل من شطري هذا المثلث فتكون :

60-90-30

60+90+30=180

---

□ الآن لو قيل لك في امتحان الهندسة مثلث متساوي الأضلاع طول كل ضلع من أضلاعه X أيا يكن و ارتفاعه X أيا يكن . ما هو قياس كل زاوية من زوايا هذا المثلث؟

ستعرف دون أن تجري أي عملية حسابية بأن قياس كل زاوية من زواياه يبلغ 60 درجة.

و لو قيل لك في امتحان الهندسة : مثلث قائم منفرج الزاوية ارتفاعه X أيا يكن و أطوال أضلاعه على التوالي هي X أيا تكن . ما هو مجموع قياس زواياه؟

ستجيب دون أن تجري أي عملية حسابية بأن مجموع قياس زوايا هذا المثلث و كل مثلث أيا يكن هو 180 درجة.

□ عندما نرسم ارتفاعا في مثلث متساوي الأضلاع , أي عندما نرسم خطا يمتد ما بين زاوية المثلث العليا و قاعدته فإننا نحصل على مثلثين قائمين متطابقين .

و في نقطة التقاء خط الارتفاع الوهمي المنصف لهذا المثلث مع قاعدة المثلث (أرضية المثلث) فإنه تتشكل لدينا زاويتين قائمتين .

---

المثلثين الذين نحصل عليهما عن طريق تنصيف مثلث متساوي الأضلاع إلى نصفين يدعيان بمثلثي: 90-60-30 درجة كما ذكرت سابقا و ذلك لأن كل مثلث من هذين المثلثين يحتوي على زاوية قائمة قياسها 90 درجة و زاوية جانبية أصيلة هي من بقايا المثلث الأم و يبلغ قياسها 60 درجة و زاوية عليا يبلغ قياسها 30 درجة .

لماذا يبلغ قياس الزاوية العليا 30 درجة؟

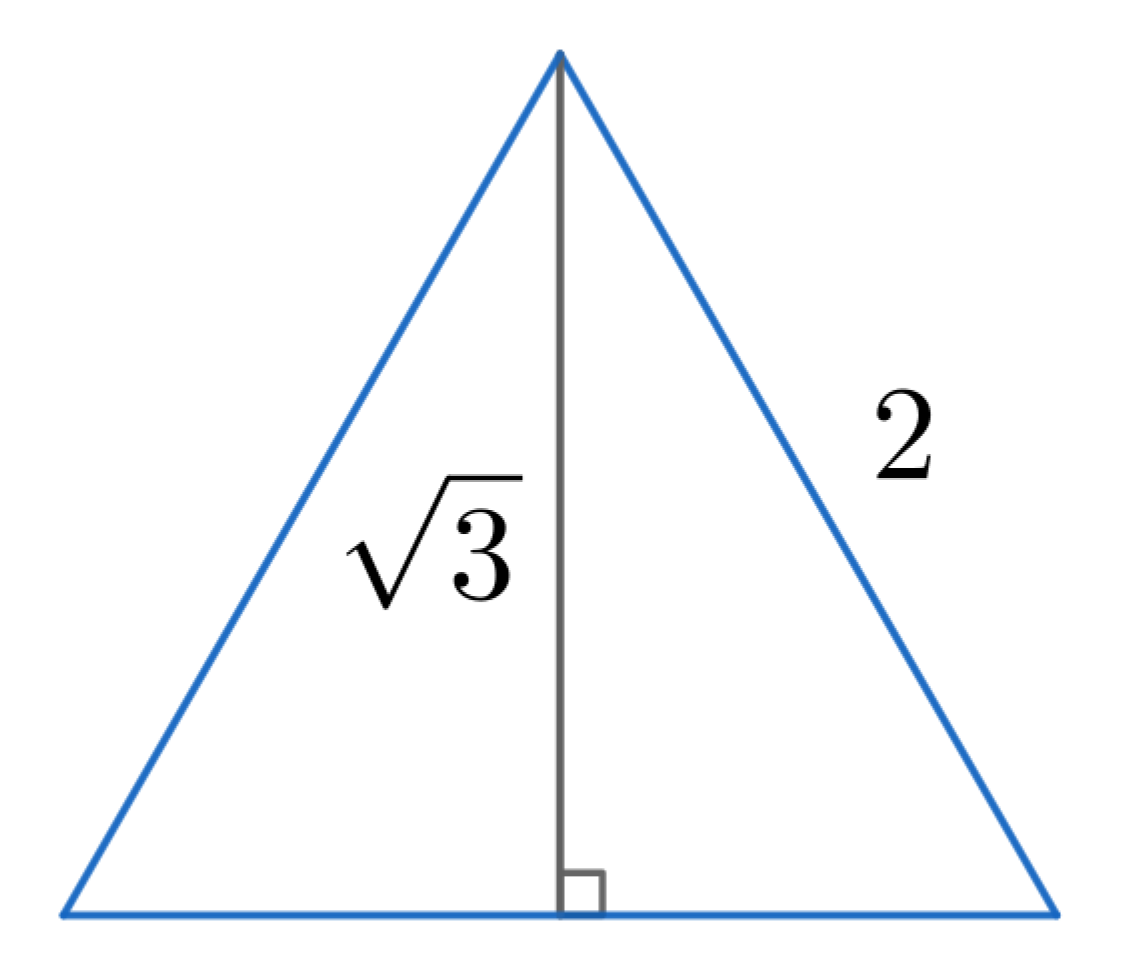
في الأصل كان قياس هذه الزاوية 60 درجة عندما كان هذين المثلثين عبارة عن مثلث واحد , غير أننا عندما قمنا بتقسيم المثلث المتساوي الأضلاع إلى مثلثين قائمين متطابقين فإن تلك الزاوية العليا قد تمت قسمتها إلى زاويتين و أصبح قياس كل منهما 30 درجة.

$60 \div 2 = 30$

---

أما وتر Hypotenuse كل مثلث من هذين المثلثين القائمين المتطابقين فإنه الضلع المقابل للزاوية القائمة . لماذا؟

لأن الوتر هو أطول ضلع في المثلث القائم الزاوية, كما أن الزاوية القائمة هي أكبر زاوية في المثلث القائم لأنه يستحيل أن توجد زاوية ثانية مساوية للزاوية القائمة أو أكبر منها , وبما أن الضلع الأطول في المثلث يكون دائما مقابلا للزاوية الأكبر فقد توجب أن يكون الوتر مقابلا للزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية.




---

---

□ يبلغ طول وتر المثلث القائم الناتج عن تجزئة مثلث متساوي الأضلاع إلى مثلثين اثنين ضعف طول قاعدته.

لماذا؟

لأن هذا المثلث هو بالأساس عبارة عن نصف مثلث متساوي الأضلاع و عندما قمنا بتجزئة المثلث الأصلي المتساوي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين فقد قمنا بتجزئة قاعدته إلى نصفين اثنين عن طريق خط الارتفاع الذي يمتد بين رأس المثلث و قاعدته و بذلك فقد أصبحت قاعدته جزئين اثنين بينما بقي ضلعه الجانبي كما هو.

و بما أن المثلث الأصلي كان مثلثا متساوي الأضلاع فإن هذا يعني بأن الضلع الجانبي الذي لم يتعرض للتقسيم يبلغ ضعف طول قاعدة أو أرضية المثلث التي قمنا بقسمتها إلى قسمين اثنين .

و في المثلثين الجديدين الذين حصلنا عليهما عن طريق تجزئة المثلث الأصلي أصبح لدينا ثلاثة أضلاع هي:

ضلع أصلي جانبي لم يتعرض لأية تجزئة و هو وتر المثلث القائم المواجه للزاوية القائمة.

ضلع قائم و هو عبارة عن ارتفاع المثلث الأصلي الذي يمتد من رأس المثلث الأصلي إلى قاعدته حيث يقسمها إلى نصفين اثنين.

و الضلع الثالث هو القاعدة التي نتجت عن تجزئة قاعدة المثلث الأصلي إلى مثلثين متساويين.

---

# حساب حجم الهرم :

الحجم يعني بالطبع السعة الداخلية.

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع .

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة قاعدة الهرم × ارتفاع الهرم .

مثال :

ما هو حجم هرم مساحة قاعدته 90 سنتمتر مربع و ارتفاعه 30 سنتمتر؟

$\frac{1}{3}\times90\times30=30\times30=900$

حجم هذا الهرم 900 سنتمتر مكعب.

بالطبع فإننا دائما نحسب الحجم بوحدة مكعبة : سنتمتر مكعب أو متر مكعب.

---

مثال آخر عن حساب حجم الهرم من الواقع :

يبلغ ارتفاع هرم الجيزة 138.684m متر أما قاعدته فهي مربعة الشكل و يبلغ طول ضلعها 233.172 مترا .

كم يبلغ حجم هرم الجيزة؟

وفقا لقاعدة حساب حجم الهرم فإن حجم الهرم يساوي ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع , لذلك فإننا نحسب أولا مساحة قاعدة الهرم و بما أن قاعدة الهرم مربعة الشكل و بما أن مساحة المربع تساوي الضلع ضرب الضلع و بما أن طول ضلع قاعدة هذا الهرم يبلغ 233.172 فإن مساحة قاعدته تساوي:

$233.172 \times 233.172 = 54369.181584$

الآن نحسب ثلث مساحة القاعدة فنقول بأن ثلث مساحة القاعدة تساوي :

$\frac{1}{3} \times 54369.181584 =$

$\frac{1}{3} \times 54369.181584 = 18123.060528$

إذا فإن ثلث مساحة قاعدة الهرم تساوي 18123.060528 متر مكعب

□ تذكر دائما :

عندما نضرب بالكسر ثلث أي $\frac{1}{3}$ الكسر واحد على 3 فكأننا نقسم العدد على 3 , أي أن عملية الضرب هذه هي بمثابة عملية قسمة على ثلاثة , و عندما نضرب بالكسر نصف أي ½ فكأننا نقسم على 2 و هكذا .

الآن فإن حجم الهرم يساوي ثلث مساحته ضرب الارتفاع :

ارتفاع هرم الجيزة 138.684 متر

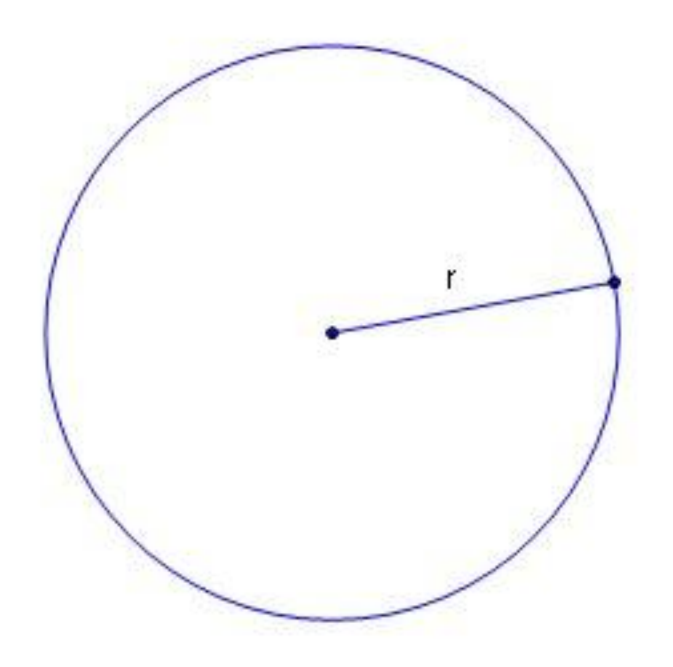
ثلث مساحة قاعدة الهرم تساوي 18123.060528

138.684×18123.060528=2513378.526265152

إذا فإن حجم إهرام الجيزة يساوي 25 مليون متر مكعب تقريبا .

---

## الدائرة



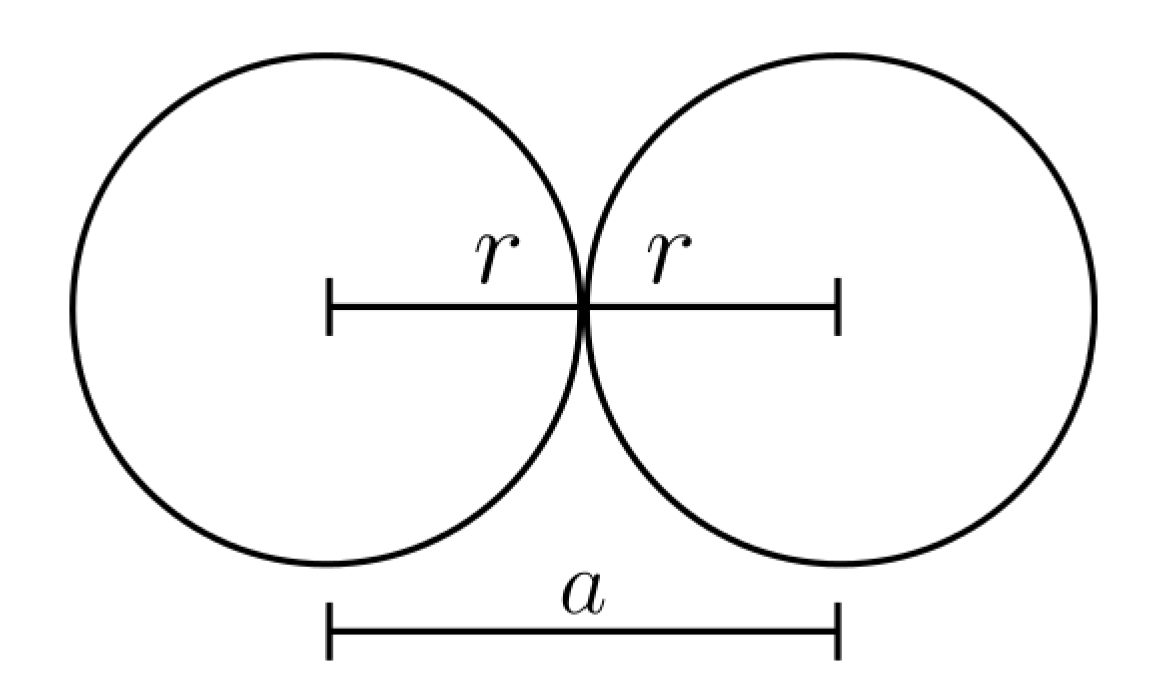

تعاريف :

نصف قطر الدائرة Radius : هو المستقيم الذي يمتد ما بين مركز الدائرة و محيطها : إن هنالك نقطتين تحدان نصف قطر الدائرة وهما مركز الدائرة و نقطة على محيط الدائرة.

جميع أنصاف الأقطار في الدائرة تكون متساوية في الطول لأن بعد محيط الدائرة عن مركزها ثابت فمن أي نقطة من النقاط

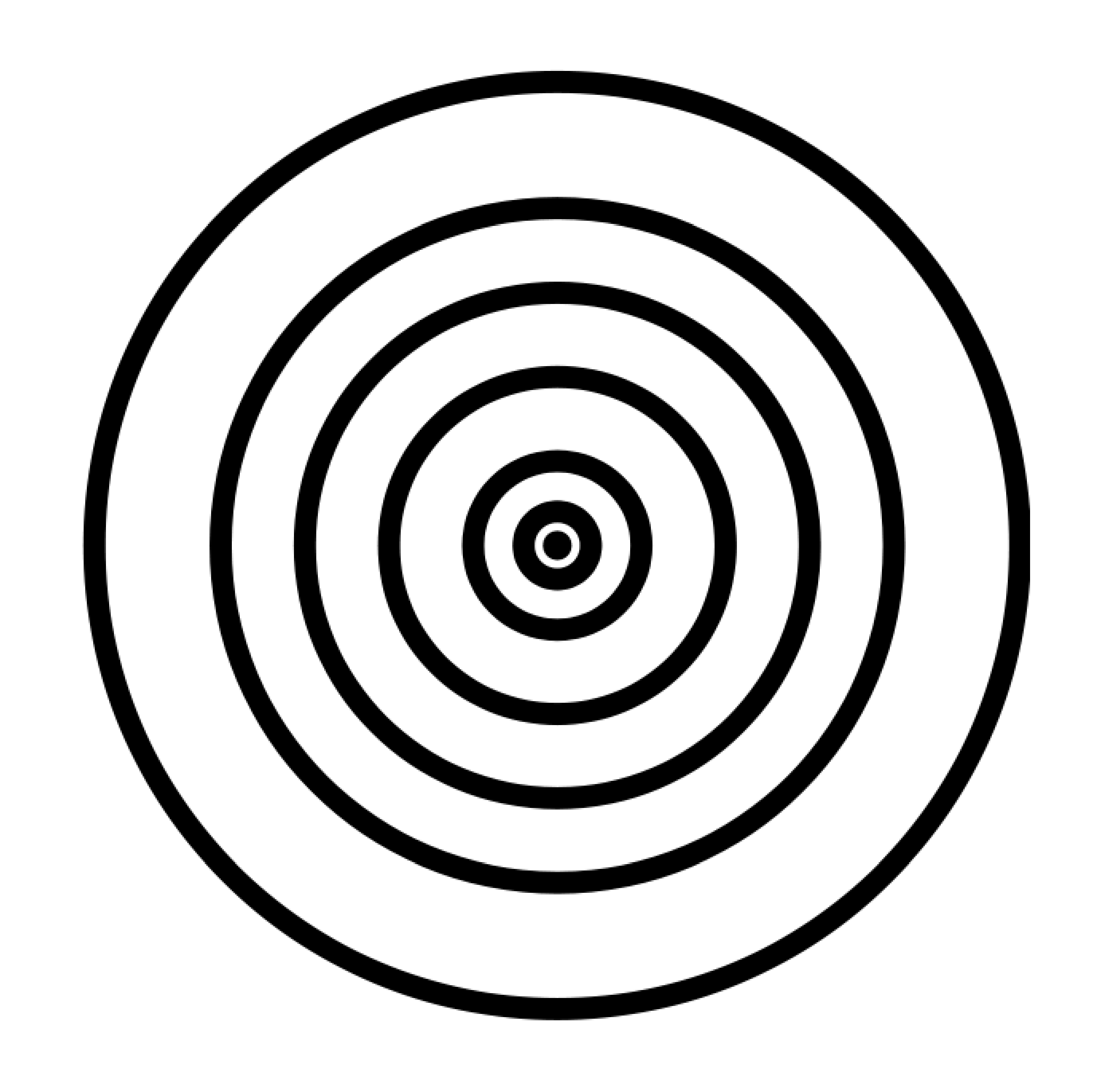
المكونة لمحيط الدائرة إذا رسمنا مستقيما يصل إلى مركز الدائرة فإننا سنحصل على الطول ذاته.

كل نقطتين على محيط الدائرة تحصران بينهما قوسا.

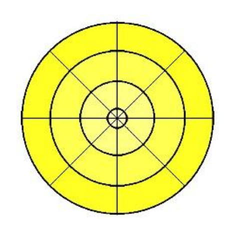



الدوائر المتماسة Tangent circles : هي الدوائر التي تلتقي مع بعضها في نقطة واحدة - لا يمكن لدائرة أن تمس دائرة أخرى إلا في نقطة واحدة فقط.

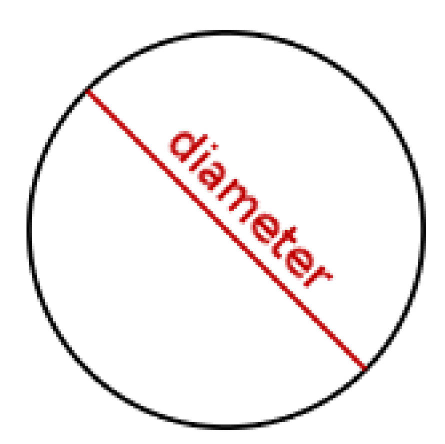
---



الدوائر المتمركزة: concentric circles : هي الدوائر التي يكون لها مركز واحد , وكيف يمكن لدائرتين أن يكون لهما المركز ذاته؟ إن ذلك يتم بأن تكون هنالك دائرة داخل دائرة .



الزاوية المتراكزة في الدائرة concentric circles : هي عبارة عن قطاع يشبه قوالب الجبنة المثلثية الموجودة في علب الجبنة الدائرية , حيث تكون كل زاوية عبارة عن قطاع أو شبه مثلث يقع رأسه عند مركز الدائرة أما قاعدته فهي عبارة عن قوس ينحصر بين نقطتين على محيط الدائرة أما قطريه الجانبيين فهما عبارة عن نصفي قطرين من أنصاف أقطار الدائرة .




قطر الدائرة diameter : هو مستقيم يصل بين نقطتين على محيط الدائرة و يمر من مركز الدائرة, وبالطبع فإن طول قطر الدائرة يبلغ ضعف طول نصف القطر radius .

و عندما نرسم قطرا للدائرة فإننا نقسم الدائرة إلى نصفين متساويين.

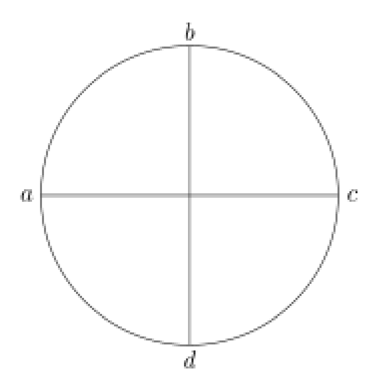
الوتر chord : هو مستقيم يصل بين نقطتين على محيط الدائرة دون أن يمر بمركز الدائر،

قطر الدائرة هو أطول مستقيم يمكن رسمه في الدائرة و هو عبارة عن مستقيم يصل بين نقطتين على محيط الدائرة و يمر عبر مركز الدائرة, ولا يكون قطر الدائرة قطرا إلا إذا حقق شرطين:

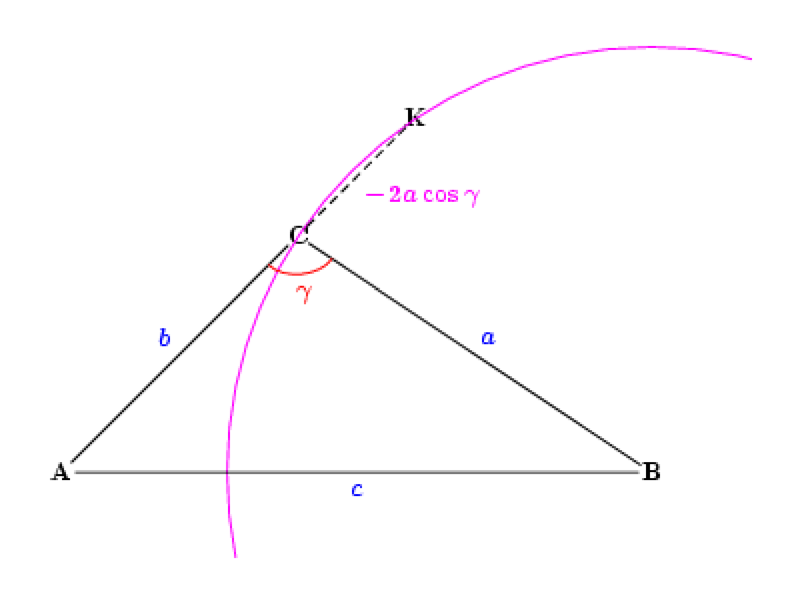
أن يصل بين نقطتين اثنتين على محيط الدائرة.

أن يمر عبر مركز الدائرة.

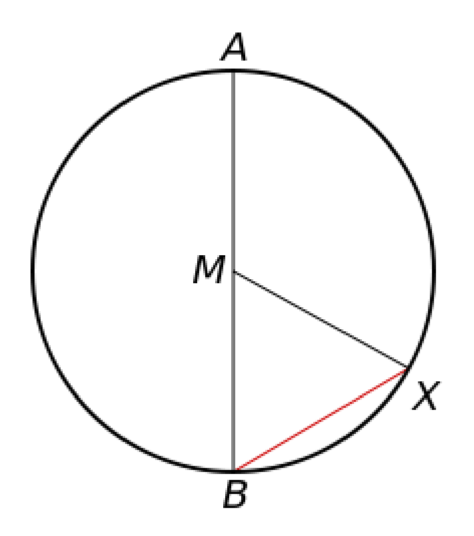
نصف قطر الدائرة: هو مستقيم يصل مركز الدائرة بأي نقطة على محيطها .




إذا رسمنا نصفي قطرين في دائرة ما فإننا نحصل على قطاع شبه مثلثي يشبه تماما قالب الجبنة المثلثي الموجود في علب الجبنة الدائرية : في هذه الحالة يكون لدينا مركز دائرة ينطلق منها نصفي قطرين يصلان بين مركز الدائرة و نقطتين على محيط الدائرة .



و إذا وصلنا بين بين النقطتين التين صنعهما نصفي القطرين على محيط الدائرة فإننا نحصل على مثلث حقيقي متساوي الساقين isosceles .




AM نصف قطر يمتد ما بين النقطة A على محيط الدائرة و النقطة M التي هي مركز الدائرة.

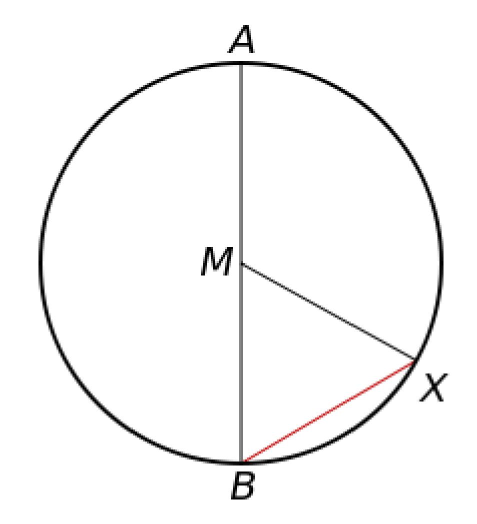
M مركز الدائرة.

X نقطة على محيط الدائرة.

MX نصف قطر يمتد ما بين مركز الدائرة M و النقطة X الموجودة على محيط الدائرة.

MB نصف قطر يمتد ما بين مركز الدائرة M و النقطة B الموجودة على محيط الدائرة.

X و B عبارة عن نقطتين على محيط الدائرة يمتد ما بينهما وتر BXوهو عبارة عن مستقيم لا يمر عبر مركز الدائرة ٬ كما أن هاتين النقطتين تحصران بينهما قوسا هي القوس BX .



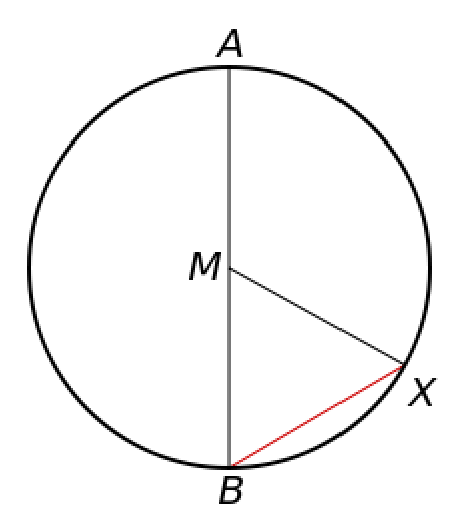

إن كلا من نصفي القطرين MX و MB الذين يمتدان ما بين مركز الدائرة M و النقطتين X و B على محيط الدائرة يشكلان مثلثا متساوي الساقين.

لماذا يكون المثلث الذي نحصل عليه عن طريق رسم نصفي قطرين في الدائرة مثلث متساوي الساقين؟

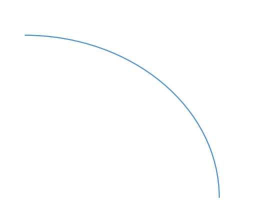
أنتم تعلمون بأن أقطار الدائرة كلها متساوية : أي أن جميع المستقيمات التي نرسمها في دائرة و التي تصل بين نقطتين على محيط الدائرة و تمر بمركز الدائرة تكون متساوية في الطول , كما أن جميع أنصاف الأقطار في الدائرة , أي المستقيمات التي تمتد بين مركز الدائرة و أي نقطة على محيط الدائرة تكون جميعها متساوية في الطول , و نحن عندما ننشي مثلثا عن طريق رسم نصفي قطرين في الدائرة يمتدان بين مركز الدائرة و نقطتين على محيطها ثم نقوم برسم مستقيم بين تلك النقطتين الموجودتين على محيط الدائرة فإننا نحصل على مثلث متساوي الساقين لأن ساقيه أو ضلعيه عبارة عن نصفي قطرين مثل قوالب الجبنة المثلثية الموجودة في علب الجبنة الدائرية.

و كما هي حال قوالب الجبنة المثلثية فإن المثلث الذي نحصل عليه برسم نصفي قطرين في دائرة يقع رأسه في مركز الدائرة أما ضلعيه الجانبيين فهما نصفي قطر الدائرة أما قاعدته فهي الوتر الذي يصل بين نقطتين على محيط الدائرة و هاتين

النقطتين بالطبع هما نقطتي التقاء نصفي القطرين مع محيط الدائرة.

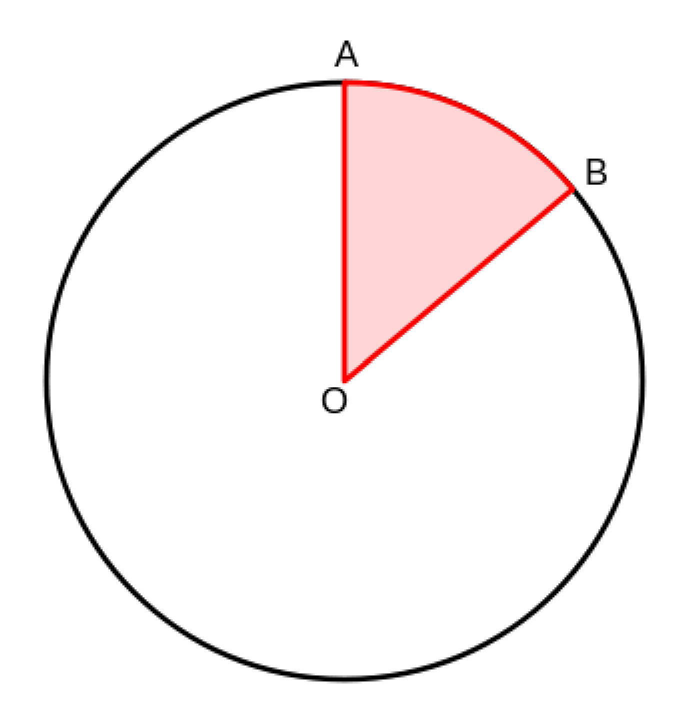


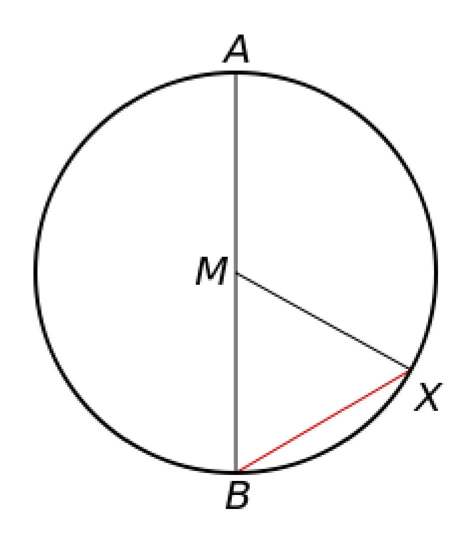

فإن المثلث الذي نحصل عليه برسم نصفي قطرين MX,MB في دائرة يقع رأسه في مركز الدائرة M أما ضلعيه
الجانبيين MX,MB فهما نصفي قطر الدائرة أما قاعدته فهي
الوتر BX الذي يصل بين نقطتين على محيط الدائرة B,X
و هاتين النقطتين بالطبع هما نقطتي التقاء نصفي
القطرين MX,MB مع محيط الدائرة.



القوس : هو خط منحني و هو عبارة عن جزء من محيط الدائرة.

إذا : إذا رسمنا نصفي قطرين يمتد كل منهما ما بين نقطة على محيط الدائرة و مركز الدائرة فإنهما سيشكلان زاوية مركزية central angle .




إن نصفي القطرين MB,MX يشكلان ساقي المثلث أما الوتر BX فإنه يشكل قاعدة المثلث.

إن هذا المثلث الذي يصنعه نصفي قطرين MB,MX و وتر BX و الذي يتوضع رأسه M عند مركز الدائرة M هو مثلث متساوي الساقين isosceles لأن ساقيه MB,MX عبارة عن نصفي قطرين يمتدان ما بين مركز الدائرة M و نقطتين B,X على محيط الدائرة , و بالطبع فإن جميع أقطار الدائرة متساوية في الطول لأن جميع النقاط التي تشكل محيط الدائرة تبعد المسافة ذاتها عن مركز الدائرة, و بالتالي فإن جميع أقطار الدائرة يجب أن تكون متساوية في الطول مع بعضها البعض و كذلك الحال بالنسبة لأنصاف الأقطار في الدائرة حيث يجب أن تكون متساوية في الطول مع بعضها البعض.

مثال على الزوايا المركزية رؤوس قوالب الجبنة المثلثة الشكل في علبة الجبنة الدائرية .

إذا :

---

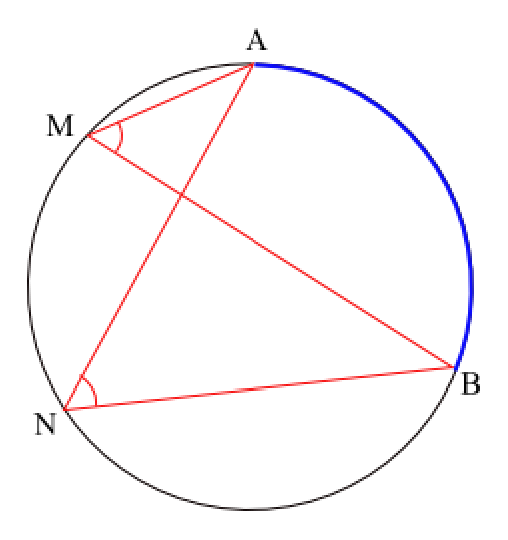
**الزاوية المركزية في الدائرة central angle : هي الزاوية التي تتشكل نتيجة تلاقي نصفي قطرين في مركز الدائرة.**

---

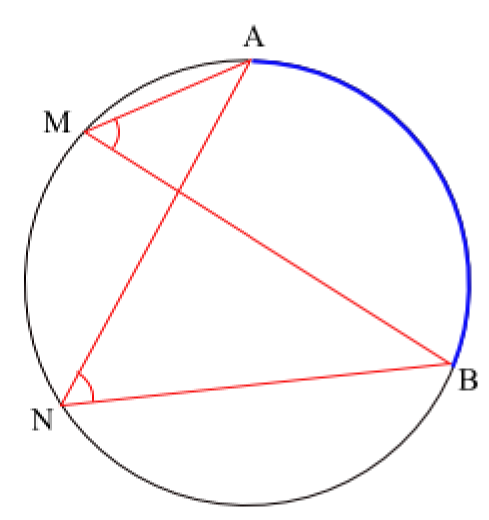
## Inscribed angle الزاوية المحوطة (الزاوية المحيطية):

ذكرت سابقا بأن الزوايا المركزية تشبه قوالب الجبنة المثلثية الشكل الموجودة في علب الجبنة الدائرية و هي **الزاوية التي تتشكل نتيجة تلاقي نصفي قطرين في مركز الدائرة**, أما الزوايا المحوطة أو الزوايا المحيطية فهي معاكسة تماما حيث أن رأسها لا يكون عند مركز الدائرة بل إنه يكون ملتصقا بمحيط الدائرة , كما أن أيا من أضلاعها لا يصل إلى مركز الدائرة و ذلك بخلاف الزوايا المركزية ( قالب الجبنة المثلثي) حيث أن رؤوسها جميعا تلتقي عند ركز الدائرة .

---




التعريف الرياضي للزاوية المحوطة أو الزاوية المحيطية: زاوية داخل الدائرة يكون الضلعين الذين يشكلانها عبارة عن وترين بينما يلامس رأس هذه الزاوية نقطة داخلية ما في محيط الدائرة.



الزوايا M,A,N,B كلها زوايا محيطية لأنها تتوضع عند محيط الدائرة و لأن الأضلاع التي تشكلها عبارة عن أوتار MB, AN, MA NB, و هذه الأوتار لا تمر عبر مركز الدائرة.

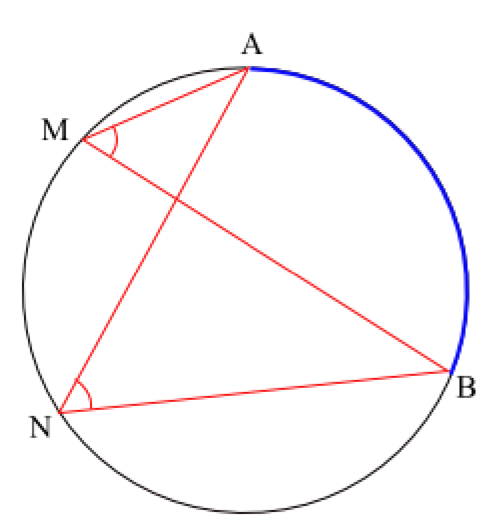
إن الزاوية المحوطة أو الزوايا المحيطية عبارة عن زاوية تلامس محيط الدائرة من الداخل, أما ضليعها فهما عبارة عن وترين .

الوتر عبارة عن مستقيم يصل بين نقطتين على محيط الدائرة و لكنه يكون أقصر من أن يمر عبر مركز الدائرة .

---

## □ القوس المعترض Intercepted arc :

هو قوس على محيط الدائرة و هذا القوس يكن محصورا بين المستقيمين الذين يشكلان الزاوية الموجودة في داخل الدائرة أو خارجها , أي أن هذا القوس يكون محصورا بين النقطتين التين يمر منهما المستقيمين الذين يشكلان بتلاقيهما الزاوية أي أن هذه القوس تكون مقابلة للزاوية و لذلك فإن هنالك علاقة تناسب بين قياس هذه القوس و بين قياس الزاوية المقابلة لها .




---

القوس AB هو قوس معترض لأنه قوس محصور بين النقطتين A و B التين ينطلق منهما الوترين AN و BN الذين يشكلان بتلاقيهما الزاوية المحيطية N .

القوس MN هو قوس معترض لأنه قوس محصور بين النقطتين M و N الموجودتين على محيط الدائرة و هما النقطتين التين ينطلق منهما الوترين MB و NB الذين يشكلان بتلاقيهما الزاوية المحيطية B التي تتوضع على محيط الدائرة.

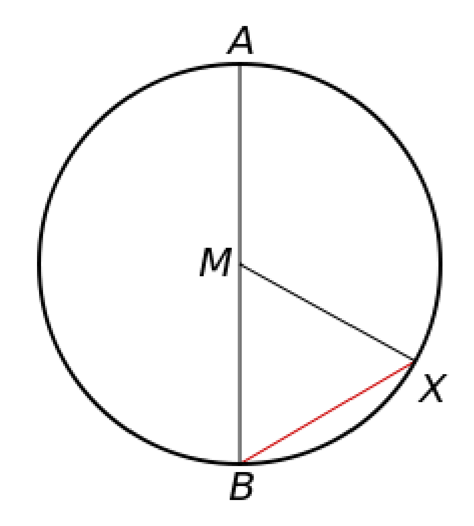
---

**يكون قياس الزاوية المركزية مماثل تماما لقياس القوس المقبل لها - أي القوس المحصور بين ضلعيها .**

في مثال قالب الجبنة المثلثي الشكل فإن القوس المقابل للزاوية هو الجزء الخلفي الدائري من قالب الجبنة .

فإذا كان قياس القوس المقابل للزاوية المتراكزة يبلغ 40 درجة فإن قياس تلك الزاوية سيكون كذلك 40 درجة و إذا كان قياس تلك الزاوية 70 درجة مثلا فإن القوس المقابل لتلك الزاوية أو لنقل الموجود ورائها و المحصور بين ضلعيها سيكون كذلك 70 درجة.

---




---

يجب أن يكون قياس الزاوية المركزية M مماثل تماما لقياس القوس BX المقابل لهذه الزاويةو التي يشكلها نصفي القطرين MB و MX .

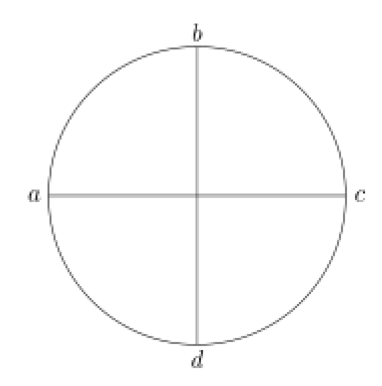
الآن سوف أخبركم عن طريقة سوف تجعلكم تستوعبون فكرة الزاوية المركزية ولا تنسوها أبدا :

أنتم جميعا تعلمون بأن الدورة الكاملة هي عبارة عن 360 درجة , أي أن قياس الدائرة يبلغ 360 درجة .

الآن لو رسمنا قطرين متعامدين عند مركز الدائرة , طبعا أنتم تعلمون بأننا إذا رسمنا قطرا واحدا في الدائرة فإن هذا يعني بأننا نقسم الدائرة إلى نصفين متساويين , أما إذا رسمنا قطرين متعامدين عند مركز الدائرة بالطبع فإن هذا يعني بأننا نقسم الدائرة إلى أربعة أرباع متساوية .

الآن, كم عدد الزوايا التي يصنعها قطرين متعامدين عند مركز الدائرة و ما نوعها ؟

---




إن القطرين المتعامدين يشكلان أربع زوايا قائمة قياس كل منها 90 درجة , و قياسها مجتمعة يبلغ 360 درجة

$4\times90=360$

الآن , كم عدد الأقواس التي يصنعها قطرين متعامدين عند مركز الدائرة ؟

أنتم جميعا تعلمون بأن قطر الدائرة يمتد بين نقطتين متقابلتين على محيط الدائرة مرورا بمركز الدائرة و هذا يعني بأن قطرا واحدا يقسم الدائرة إلى نصفين متساويين أي أنه يقسمها إلى قوسين متساويين , و إذا تعامد قطرين مع بعضهما فإنهما يقسمان الدائرة إلى أربعة أرباع متساوية .

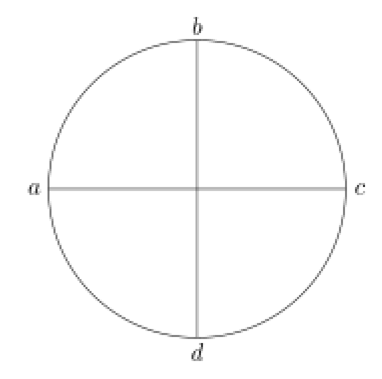
الآن , كم يبلغ قياس كل قوس من هذه الأقواس الأربعة التي قسمنا محيط الدائرة إليها ؟

بما أن قياس محيط الدائرة يبلغ 360 درجة فإن هذا يعني بأننا إذا قسمنا محيط الدائرة إلى أربعة أرباع سيكون قياس كل ربع 90 درجة .

$360\div4=90$

ستلاحظون في هذه الحالة بأن كل زاوية قائمة قياسها 90 درجة سيكون ورائها قوس قياسه كذلك 90 درجة و هذا القوس سيكون محصورا بين النصفي القطرين المتعامدين الذين شكلا تلك الزاوية القائمة .

إذا أصبح لدينا أربعة زوايا مركزية قياس كل منها 90 درجة يحصر نصفي القطرين الذين شكلاها بتعامدهما ورائهما قوسا قياسها كذلك 90 درجة .




يقسم القطرين bd و ac هذه الدائرة إلى أربعة أقسام متساوية و يشكل هذين القطرين المتعامدين أربع أقواس و هي

Ab,bc,cd,da كما يشكل هذين القطرين المتعامدين أربعة زوايا قائمة قياس كل منها 90 درجة.

كل قوس مقابل لزاوية مركزية يكون قياسه مماثلا لقياس تلك الزاوية المركزية و بما أن قياس كل زاوية لدينا يبلغ 90 درجة فإن قياس كل قوس في هذه الدائرة يبلغ كذلك 90 درجة.

فكرة أخرى ستجعلكم تستوعبون مسألة الزوايا المركزية :

---

تعرفون جميعا علب الجبنة الدائرية التي تحوي قوالب جبنة مثلثية الشكل و أنتم تعرفون بأن قوالب الجبنة المثلثية الشكل لها رؤوس أو زوايا حادة , و أن هذه الزوايا الحادة كلها تلتقي في نقطة مركزية هي مركز علبة الجبنة الدائرية أو ما ندعوه بمركز الدائرة.

لكل قالب جبنة مثلثي الشكل ضلعين متساويين و و كل ضلع من أضلاع قوالب الجبنة المثلثية هو نصف قطر من أقطار الدائرة ذلك أنه يمتد ما بين محيط الدائرة و مركزها .

إن جميع أنصاف الأقطار في الدائرة , أي أن جميع أضلاع قوالب الجبنة متساوية في الطول .

الجزء الخلفي الدائري المقوس من قالب الجبن يدعى بالقوس :
القوس هو جزء من محيط الدائرة -إن تجمع أقواس قوالب
الجبنة المثلثية مع بعضها البعض يشكل دائرة تامة.

إن قياس الدائرة كما تعلمون هو 360 درجة و هذا قياس كل
دائرة بما فيها بالطبع علب الجبنة الدائرية, و بما أن
الدائرة التي يشكلها تجمع أقواس ثمانية 8 اقواس قوالب
جبنة فإن قياس كل قوس من تلك الأقواس يساوي:

$360÷8=45$

إذا فإن قياس قوس كل قالب جبنة يساوي 45 درجة , و كما
تعلمون فإن زوايا قوالب الجبنة هي زوايا مركزية.

لماذا؟

لأن أضلاعها عبارة عن أنصاف أقطار و لأن تلك الزوايا تتوضع
عند مركز الدائرة.

إن هذا يعني بأن قياس هذه الزوايا يماثل قياس القوس
المحصور ورائها, أي القوس المحصور بين ضلعيها , أي أن
قياس كل زاوية من زوايا قوالب الجبنة يساوي 45 درجة كذلك
.

و إذا اردنا معرفة قياس زوايا قوالب الجبنة يمكننا كذلك
تقسيم 360 درجة على عدد قوالب الجبنة و هو 8 قوالب فنحصل
بذلك على قياس كل زاوية من زوايا قالب الجبنة و هو 45
درجة.

---

الزاوية المحوطة (الزاوية المحيطية) Inscribed angle :

هي زاويةيكون ضلعيها عبارة عن وترين وليس نصفي قطرين إن
الزاوية المحوطة تنشأ عندما يمتد ضلعين من نقطتين على
محيط الدائرة و يلتقيان في نقطة ثالثة تقع كذلك على الجهة

المقابلة من محيط الدائرة دون أن يمرا بمركز الدائرة , أي أن الزاوية المحوطة تكون معاكسة تماما لوضع قالب الجبنة المثلثي في علبة الجبنة حيث يكون رأسها ملامسا لمحيط الدائرة من الداخل .

قاعدة هندسية :

---

**يبلغ قياس الزاوية المحيطية نصف قياس القوس المحصور بين الوترين الذين يشكلانها - إن قياس الزاوية المحوطة يبلغ نصف قياس القوس الموجود ورائها .**

---

**مقارنة بين الزاوية المركزية و الزاوية المحيطية :**

**□ الزاوية المركزية : رأسها الحاد يلامس مركز الدائرة.**

**الزاوية المحيطية : رأسها يلامس محيط الدائرة من الداخل.**

**الزاوية المركزية : تننشأ نتيجة تلاقي نصفي قطرين مع مركز الدائرة .**

**الزاوية المحيطية : تنشأ نتيجة تلاقي وترين انطلقا من نقطتين على محيط الدائرة و تلاقيا في نقطة ما على الجهة المقابلة من محيط الدائرة.**

**الزاوية المركزية : يكون قياسها مماثل تماما لقياس القوس الموجود ورائها و المحصور بين نصفي القطرين الذين شكلاها .**

**الزاوية المحيطية : يكون قياسها نصف قياس القوس الموجود ورائها و المحصور بين الوترين الذين شكلاها .**

---

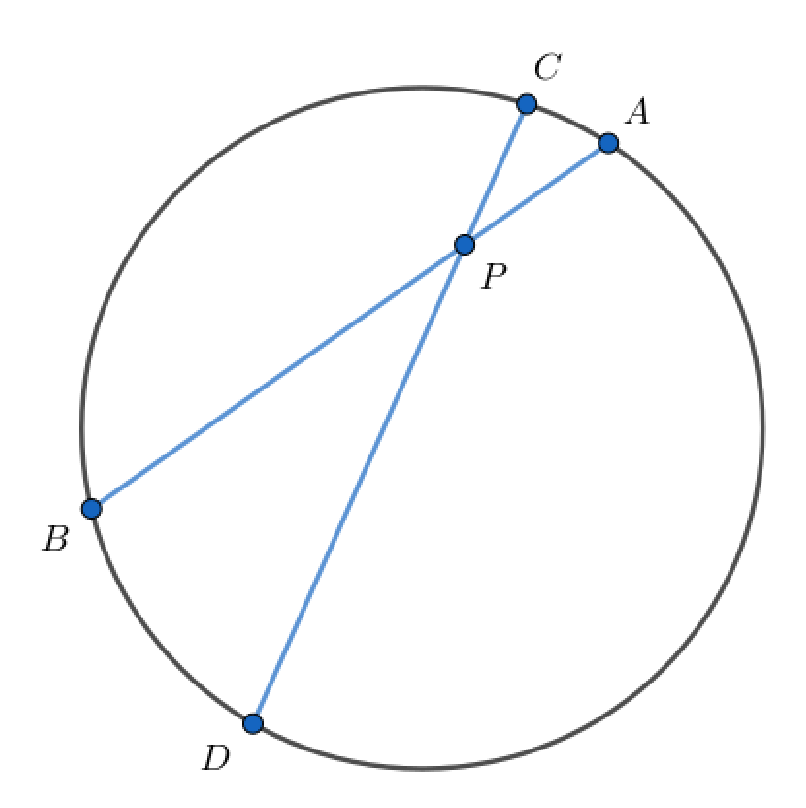
**التناسب ما بين أقواس الدائرة و الزوايا**

□ إذا تقاطع وترين في دائرة و شكلا حرف X في نقطة ليست بالطبع مركز الدائرة فإنهما يشكلان بتقاطعهما ذاك 4 زوايا متقابلة بالرأس .

---

إن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متطابقتين و متساويتين في القياس.

إن قياس أي زاوية من هاتين الزاويتين المتقابلتين بالرأس يساوي نصف مجموع قياس القوسين الذين يحصران بينهما هاتين الزاويتين و المحصورين بين الوترين الذين شكلا هاتين الزاويتين .




---

| قياس أي من الزاويتين الحادتين المتقابلتين بالرأس p يساوي قياس القوس BD زائد قياس القوس CA تقسيم 2 . |
|---|

فإذا كان قياس أحد هذين القوسين 30 درجة و كان قياس القوس الثاني 50 درجة فإن قياس أي زاوية من هاتين الزاويتين الحادتين المتقابلتين بالرأس التين تقعا بين هذين القوسين يساوي:

---

$\frac{1}{2} \times (50+30) = 40$

إذا فإن قياس كل زاوية من هاتين الزاويتين المتقابلتين بالرأس يبلغ 40 درجة.

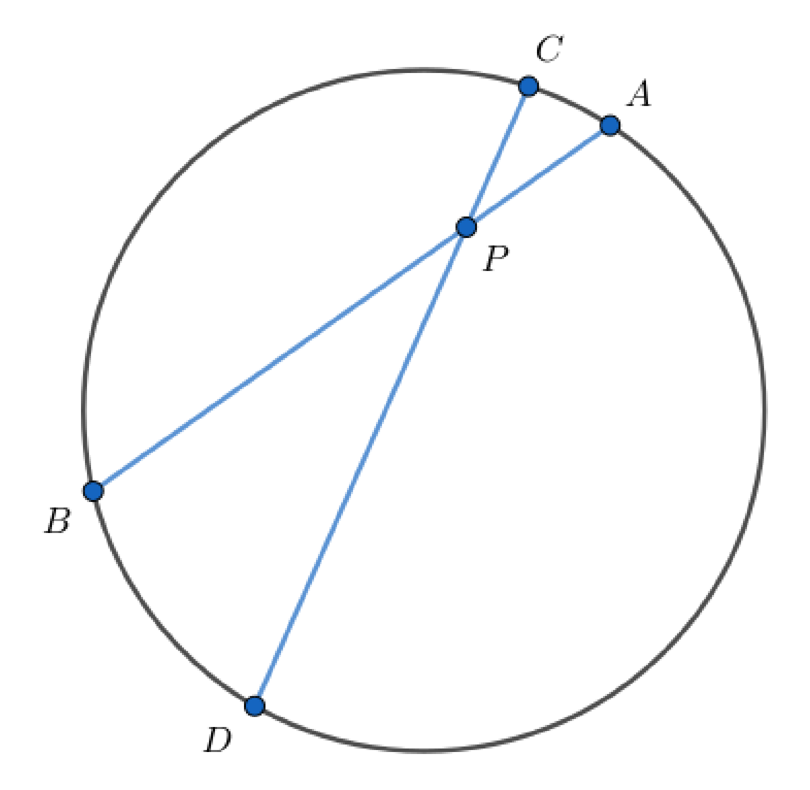
لدينا الوترين BD و GA و هما بالطبع وترين لأنهما لا يمران بمركز الدائرة.

هذين الوترين يتقاطعان في النقطة P ويصنعان بتقاطعهما أربع زوايا متقابلة بالرأس زاويتين حادتين و زاويتين منفرجتين.

لدينا قوسين متقابلين و هما القوس BD و القوس GA.

إن قياس أي زاوية يساوي نصف مجموع قياس القوسين التين تقعان أمام و وراء تلك الزاوية أي القوسين المحصورين بين الوترين الذين شكلا تلك الزاوية.

---



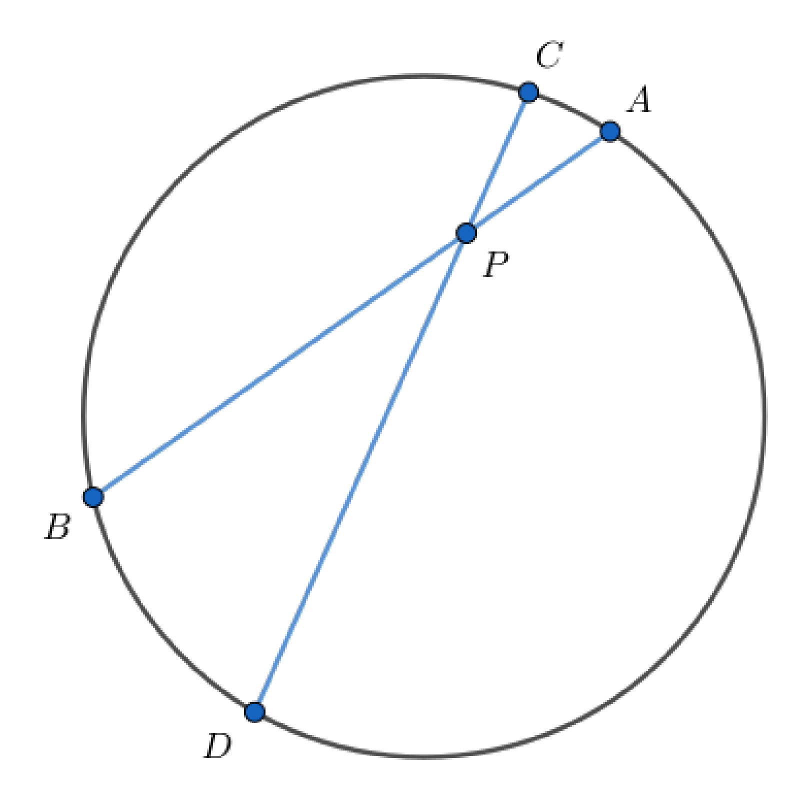

لدينا القوس BC و القوس AD و بين هذين القوسين لدينا زاويتين منفرجتين متقابلتين بالرأس P .

إن قياس أي واحدة من هاتين الزاويتين المنفرجتين المتقابلتين بالرأس يساوي مجموع قياس القوس BC مع القوس DA تقسيم 2 .

---

| تذكر دائما بأن ضرب عدد ما بالكسر نصف ½ يعني تقسيم ذلك العدد على 2 . |
|---|

---




---

لاحظ بأن القوسين الكبيرين BC و AD ذوي القياس الكبير يحصران بينهما زاويتين منفرجتين P متقابلتين بالرأس قياسهما كبير , أما القوسين الصغيرين BD و CA فإنهما يحصران بينهما زاويتين حادتين صغيرتي القياس .

إذا فإن هنالك تناسبا ما بين قياس القوس و بين الزاوية التي تتشكل أمام ذلك القوس.

إن قياس أي من الزاويتين التين تتشكلان بين قوسين متقاطعين يساوي مجموع قياس القوسين الذين يحصران بينهما هاتين الزاويتين تقسيم 2 .

---

**في الحالة السابقة لدينا و ترين ينطلقا من نقطتين على محيط الدائرة ثم يتقاطعان في نقطة ما داخل الدائرة و يتابعا امتدادهما ليصلا إلى الجهة المقابلة من محيط الدائرة , فنحصل على شكل X الذي يتألف من تلاقي أربع زوايا تحصر كل زاوية ورائها قوسا , و كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متطابقتين كذلك في القياس و يبلغ قياس كل منهما نصف مجموع قياس القوسين الموجودين ورائهما و المحصورين بين الوترين الذين شكلا هاتين الزاويتين.**

☐ ارسم دائرة .

☐ ارسم داخل تلك الدائرة وترين متقاطعين مع بعضهما البعض بالطبع في نقطة ليست بالطبع مركز الدائرة بحيث يقسم هذين الوترين المتقاطعين X الدائرة إلى أربعة أقسام غير متساوية .

سيصنع هذين الوترين المتقاطعين بتقاطعهما أربع زوايا متقابلة على شكل X .

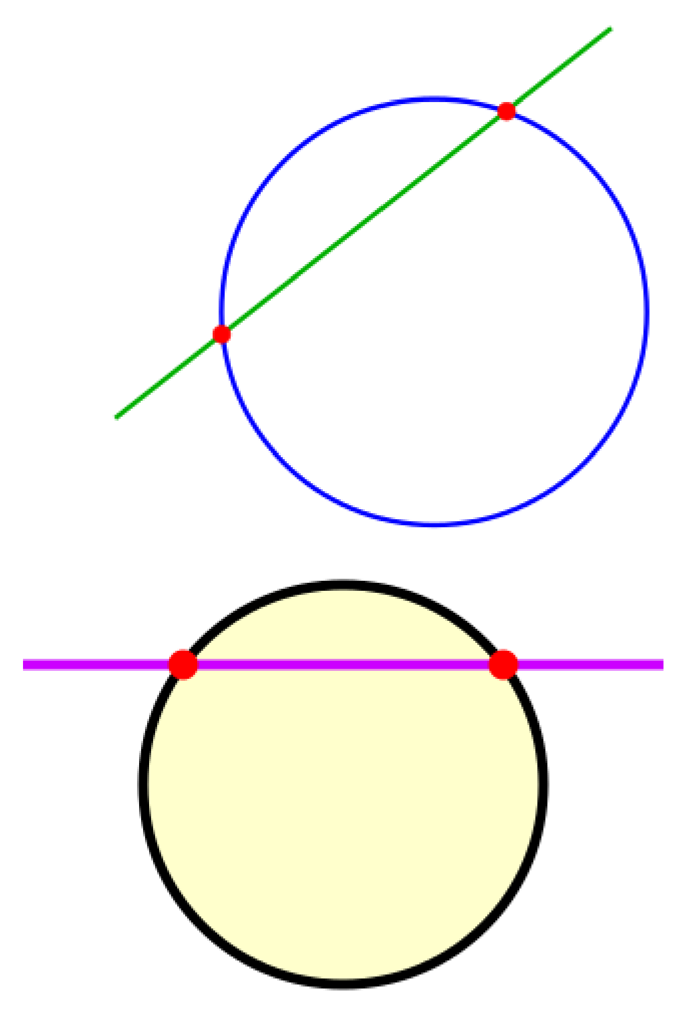
إن كل زاويتين متقابلتين ستكونان زاويتين متطابقتين و سيكون لهما القياس ذاته .

---

إن قياس كل زاوية من هاتين الزوايا الأربعة سيكون مماثلا لنصف مجموع قياس القوس الموجود ورائها و القوس الموجود أمامها .

---

وتر الدائرة :



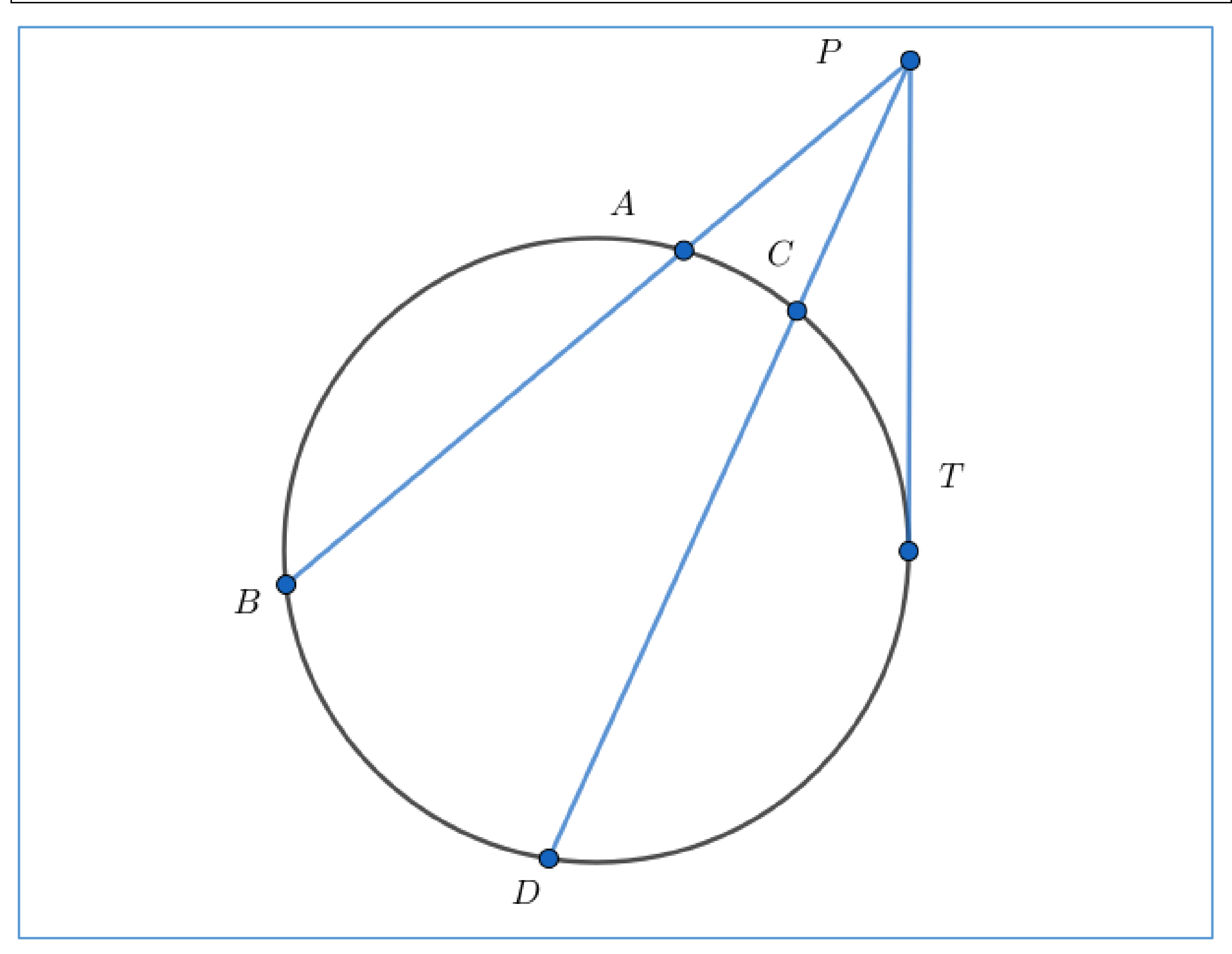
وتر الدائرة هو أي مستقيم يقطع محيط الدائرة في نقطتين دون أن يمر بمركز الدائرة.

---

□ تحدثت سابقا عن الزوايا التي تتشكل داخل الدائرة ,غير أنه **يمكن أن تكون هنالك زوايا خارج الدائرة كذلك فإذا التقى مستقيم مماس للدائرة وهو مستقيم يمس الدائرة في نقطة واحدة خارج الدائرة مع مستقيم قاطع لقوس الدائرة ,**

و هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين اثنتين و يصنع وترا داخل الدائرة.

فإذا التقى هذين المستقيمين خارج الدائرة فإن نتيجة تقاطعهما خارج الدائرة ستكون تشكل زاوية خارج الدائرة و هذه الزاوية هي زاوية محيطية Inscribed angles و كل زاوية من هذه الزوايا المحيطية يكون قياسها نصف قياس القوس الموجود ورائها و المحصور بين المستقيمين الذين شكلا تلك الزاوية.




□الزاوية P زاوية محيطية نشأت نتيجة تلاقي مستقيمين مختلفين في النوع خارج الدائرة :

مستقيم مماس للدائرةT,P مر بجانب الدائرة ولا مسها في نقطة واحدة ,وهي النقطة T و تابع طريقه ليلتقي بالمستقيم الثاني خارج الدائرة في النقطة P.

مستقيم قاطع للدائرة B,P اخترق محيط الدائرة في نقطتين B,Aو شكل وترا داخل الدائرةB,A ثم تابع طريقه إلى خارج الدائرة ليلتقي بالمستقيم الثاني في النقطةP.

و خلف الزاوية التي تشكلت خارج الدائرة كان هنالك قوس محصور بين هذين المستقيمين الذين شكلا بتلاقيهما تلك الزاوية وهي القوس A,T .

إن قياس الزاويةP يبلغ نصف قياس القوس A,T الموجود ورائها و المحصور بين المستقيمين BP,TPالذين شكلا تلك الزاوية بتلاقيهما .

---

# حالة هندسية

ماذا لو مددنا وترين من أوتار الدائرة , أي ماذا لو مددنا أي مستقيمين في الدائرة يمتد كل من هما بين نقطتين متقابلتين على محيط الدائرة ولا يمران عبر مركزها .

ما هو قياس تلك الزاوية التي يشكلها امتداد وترين من أوتار الدائرة؟

علينا الانتباه إلى أن كل زاوية يشكلها امتداد وترين خارج الدائرة يكون ورائها قوسين اثنين و ليس قوس واحد : قوس خلفية كبرى يشكلها المستقيمان في بداية دخولهما للدائرة و

قوس أمامية صغرى يشكلها المستقيمان عند خروجهما من الدائرة , ثم يكون لدينا الزاوية التي تمثل نقطة لقاء هذين المستقيمين.

إذا يصبح لدينا زاوية واحدة تقع خارج الدائرة و قوسين اثنين وراء تلك الزاوية محصورين بين المستقيمين الذين شكلا بتلاقيهما تلك الزاوية.

إن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس القوس الأولى ناقص نصف قياس القوس الثانية .

لدينا الوترين B,P و D,P الذين ينطلقان من النقطتين B,D الواقعتين على محيط الدائرة ,ثم يخترقان محيط الدائرة من نقطتين مقابلتين على محيط الدائرة و هما A,C ليلتقي هذين الوترين في النقطة P مشكلين زاوية حادة هي االزاويةP .

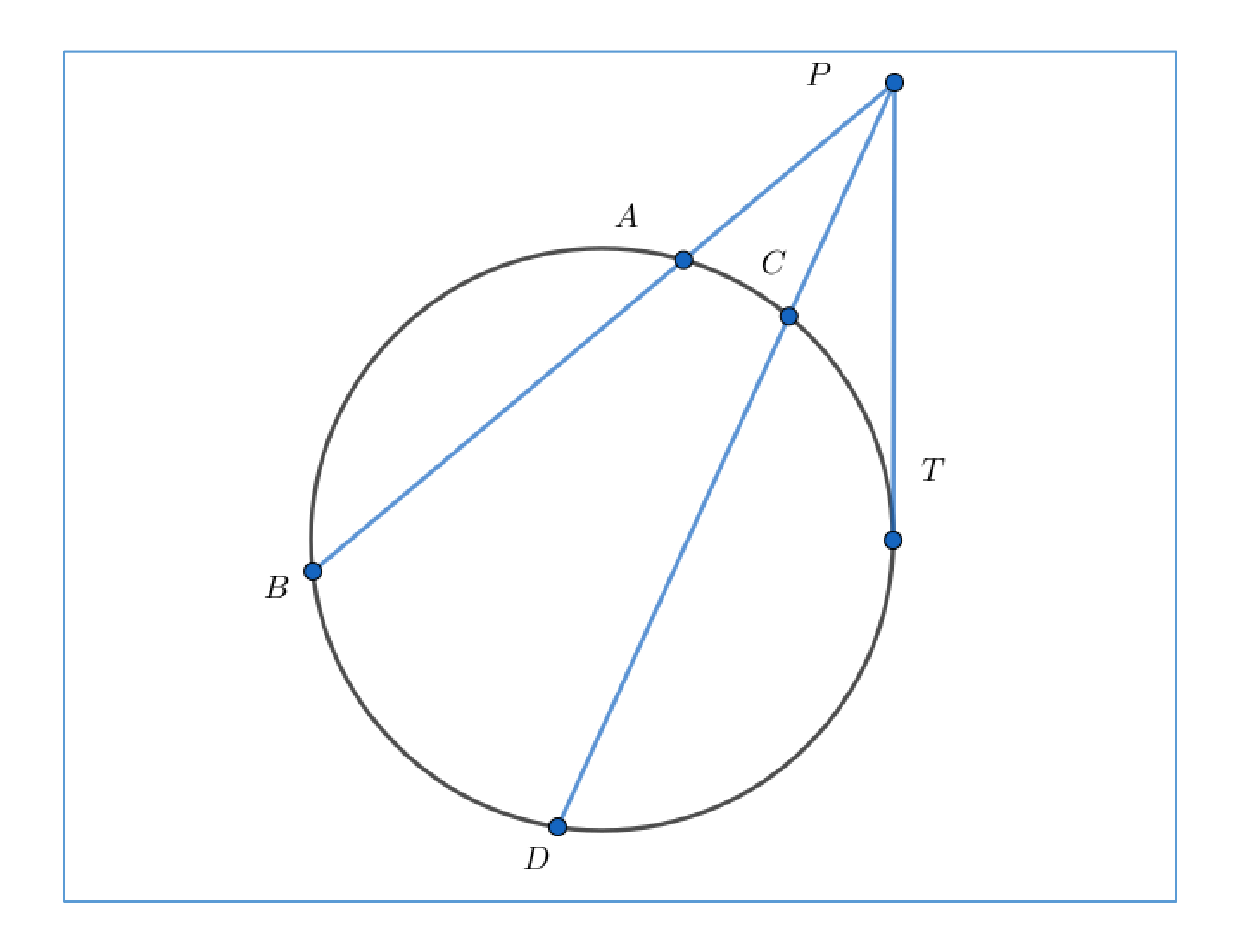
إن كلا من المستقيمين B,P و D,P هما وترين لأنهما لا يمران من مركز الدائرة.

يشكل هذين الوترين عند بداية انطلاقهما قوسا كبرى تقع بين نقطتي انطلاق هذين الوترين وهما النقطتين B,D الواقعتين على محيط الدائرة و هذه القوس الكبرى تكون محصورة بين النقطتينB,D و لذلك تدعى تلك القوس الكبرى بالقوس BD .

كما يشكل هذين الوترين عند خروجهما من محيط الدائرة قوسا صغرى تكون محصورة بين نقطتي خروجهما من محيط الدائرة A,C و هذه القوس الصغرى التي تكون محصورة بين هاتين النقطتين تدعى كذلك باسم AC .

و هكذا يكون وراء الزاوية P قوسين اثنين : قوس صغرى AC و قوس كبرى BD و كلا هذين القوسين يكونان محصورين بين الوترين BP و DP الذين شكلا بلقائهما الزاوية P .

---




إن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس القوس الأولى ناقص نصف قياس القوس الثانية .

فإذا كان قياس القوس الخلفية الخلفية الكبرى B,D 150 درجة مثلا و إذا كان قياس القوس الأمامية الصغرى A,C 100 درجة فإن قياس الزاوية P يساوي :

$\frac{1}{2}\times 150-\frac{1}{2}100=25$

$$\frac{1}{2}\times 150-\frac{1}{2}\times 100=25$$

قياس القوس الأولى 150 درجة و نصف قياسها يبلغ 75 درجة أما قياس القوس الثانية فيبلغ 100 درجة و نصف قياسها 50 درجة :

$$75-50=25$$

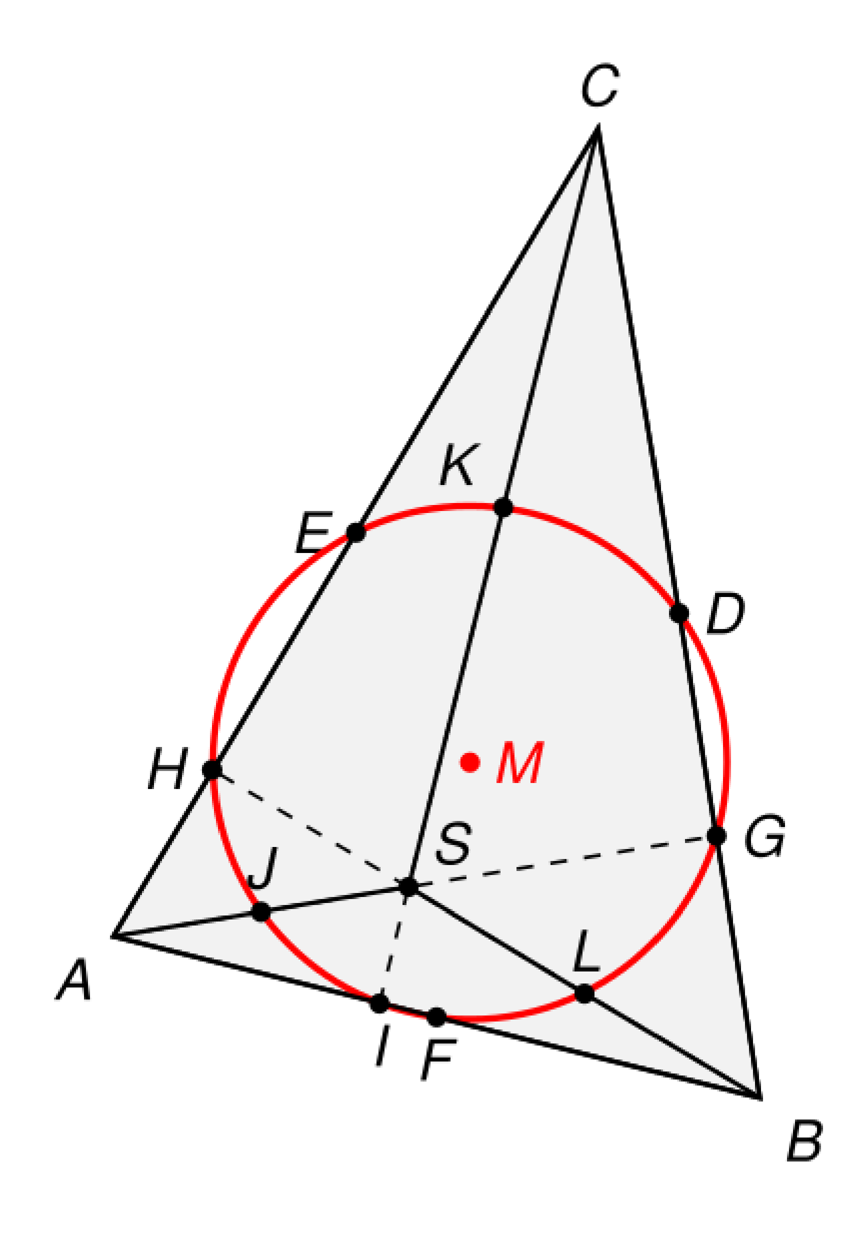
إذا فإن قياس الزاوية P يبلغ 25 درجة .

---

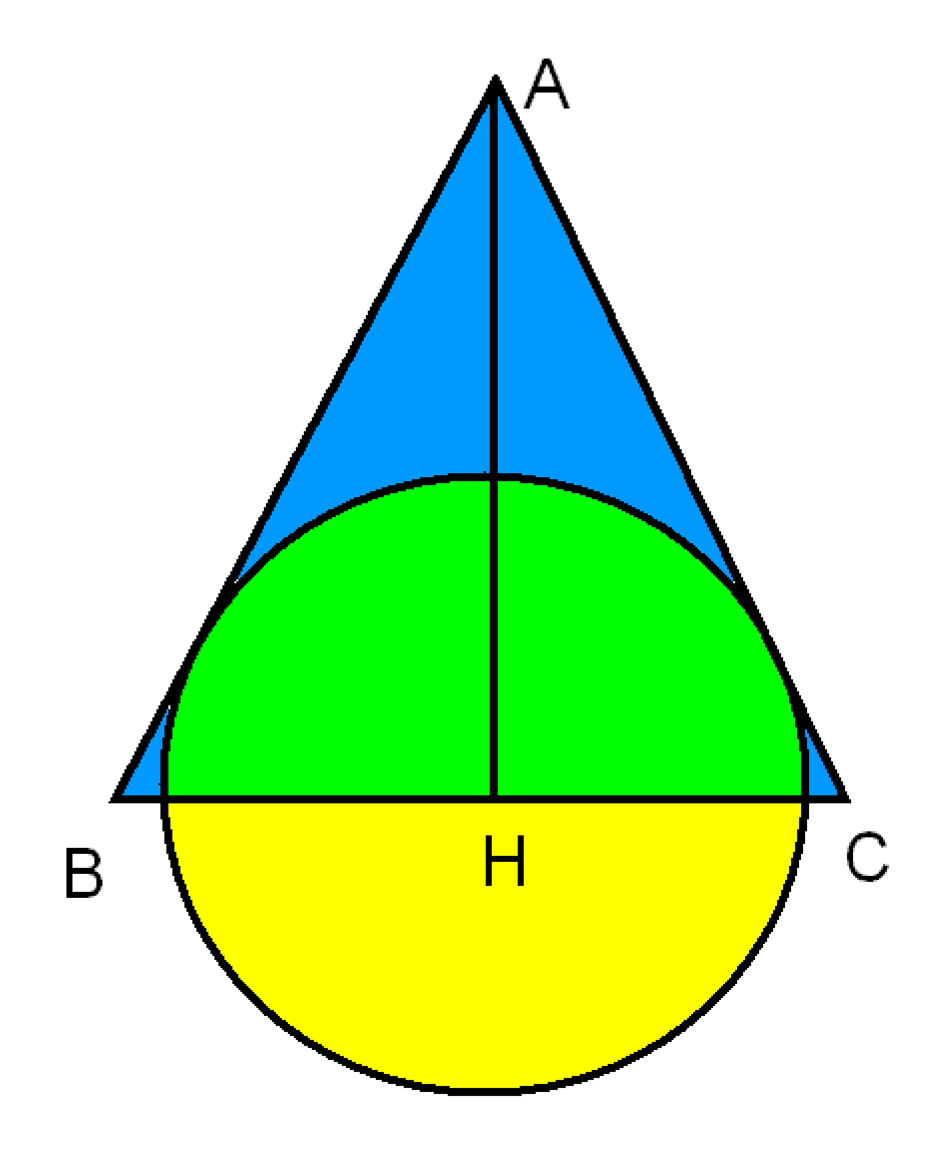
**تذكر دائما بأننا عندما نضرب بالكسر ½ فكأننا نقسم على 2 .**

قم بتحليل هذا الشكل وفقا للنظرية السابقة :

---

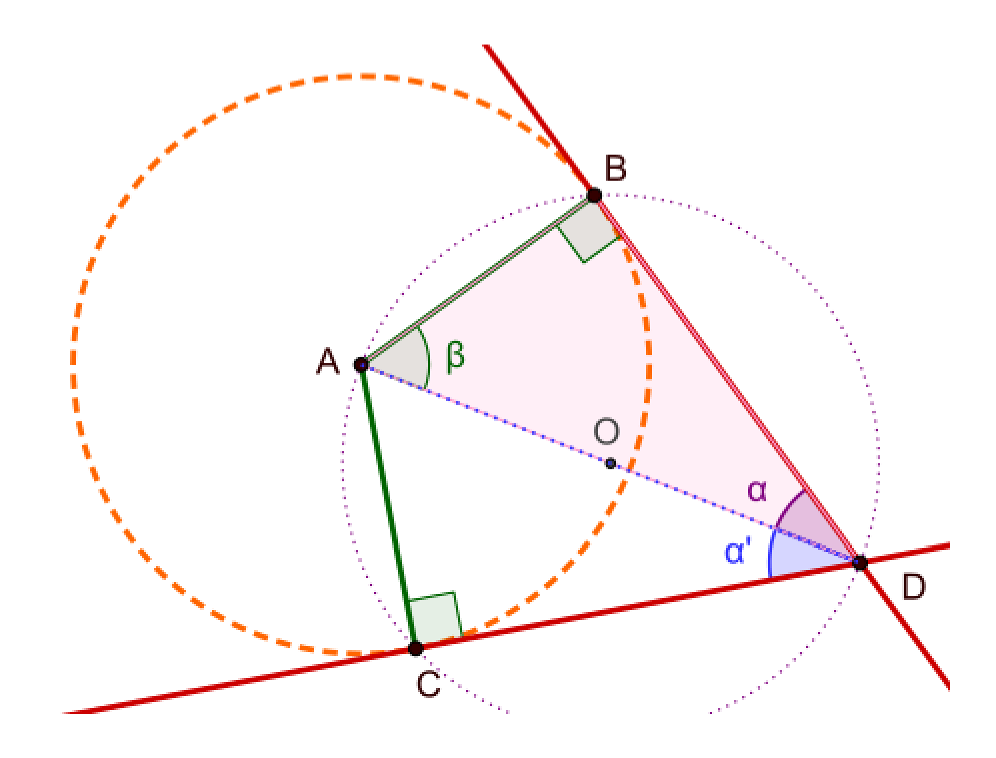



الزاوية التي يشكلها مماسين للدائرة خارج الدائرة




إذا لا مس مستقيمين غير متوازيين AB, AC محيط الدائرة من الخارج و تابعا سيرهما ليلتقيا خارج الدائرة في النقطة A التي هي عبارة عن زاوية حادة يصنعها التقاء هذين المستقيمين .

- يمكن تخيل هذا الأمر على أنه مثلث ملتصق بدائرة .

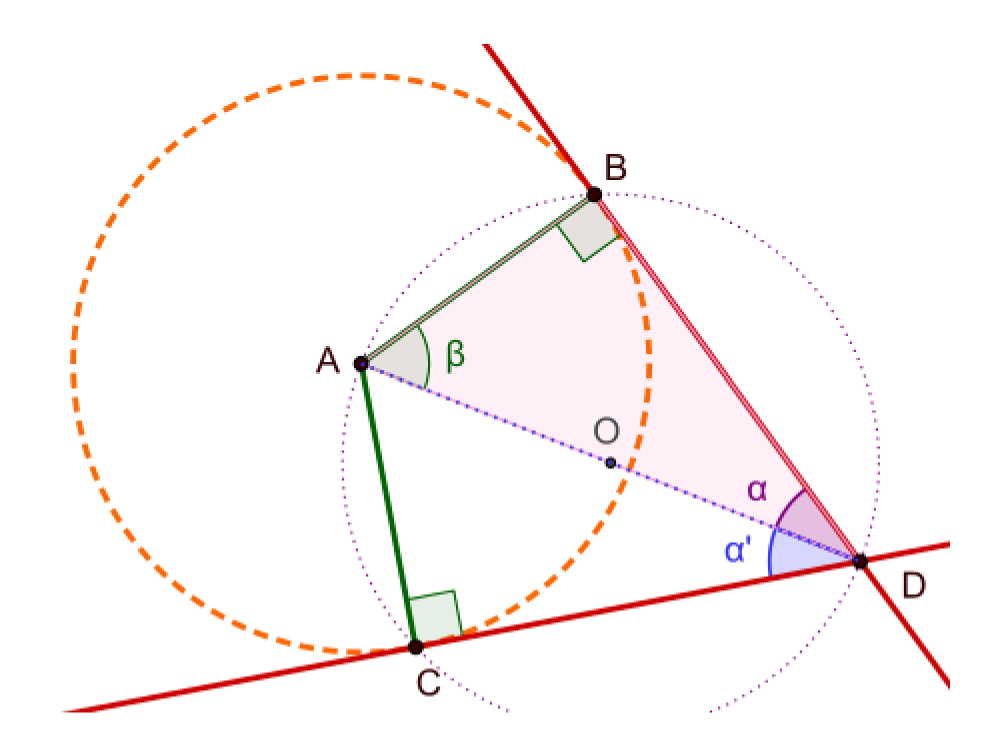



إذا لا مس مستقيمين غير متوازيين BD, CD محيط الدائرة من الخارج و تابعا سيرهما ليلتقيا خارج الدائرة في النقطة D التي هي عبارة عن زاوية حادة يصنعها التقاء هذين المستقيمين .

إن نقطتي تماس هذين المستقيمين مع الدائرة أي النقطة B و النقطة C تحصران بينهما قوسين : قوس صغرى minor arc تقع أمام نقطتي التماس هاتين أي النقطتين B و C و قوس كبرى major arc تقع وراء نقطتي التماس هاتين أي النقطتين B و C و هذه القوس الكبرى تمثل بقية الدائرة .

و يمكن القول كذلك بأن القوس الصغرى BC تقع أمام مركز الدائرة A, بينما تقع القوس الكبرى وراء مركز الدائرة A

إن القوس الصغرى هي أقرب مسافة على محيط الدائرة بين نقطتي التماس هاتين أي النقطتين B و C, أما القوس الكبرى فإنها تمثل أكبر مسافة على محيط الدائرة بين نقطتي التماس أي النقطتين B و C, أي أنها تمثل بقية محيط الدائرة.




---

الآن إذا أردنا حساب قياس الزاوية الحادة D التي يصنعها مستقيمان مماسان للدائرة B,D و C,D في نقطة تقع خارج الدائرة فإننا نقول بأن قياس الزاوية D يساوي نصف قياس القوس الكبرى ناقص قياس القوس الصغرى .

فإذا شكل مستقيمين B,D و C,D في نقطة لمسهما لمحيط الدائرة قوسا كبرى قياسها 230 درجة مثلا و قوسا صغرى قياسها 130 درجة مثلا فإن قياس الزاوية التي تتشكل نتيجة تلاقي هذين المستقيمين تساوي :

الكسر $\frac{1}{2}$ ضرب قياس القوس الكبرى ناقص قياس القوس الصغرى.

أي :

½ × ( قياس القوس الكبرى - قياس القوس الصغرى ).

$½×(230-130)$

لحل هذه المعادلة فإننا نقوم أولا بحل العملية الموجودة بين القوسين فنكتب :

$230-130=100$

ثم نضرب الناتج بالكسر ½ :

$½×100=50$

إذا فإن قياس الزاوية الناتجة عن التقاء مستقيمين مماسين أو ملامسين لمحيط هذه الدائرة يبلغ 50 درجة .

---

تذكر دائما :

عندما تكون لدينا معادلة رياضية ما تحوي قوسين فإننا نبدأ دائما بإجراء العمليات الرياضية المحصورة بين قوسين.

إن ضرب أي عدد بالكسر نصف ½ يعني تقسيم ذلك الكسر على 2 .

---

## □استيعاب مسألة القوس الصغرى و القوس الكبرى:

ارسم نقطتين على محيط الدائرة لا على التعيين , و لكن لا تجعلهما عند منتصف الدائرة تماما .

ارسم خطا وهميا بين هاتين النقطتين.

الآن إن هذا الخط الذي رسمته سيقسم الدائرة إلى قسمين: القسم الأكبر يمثل القوس الكبرى , و القسم الأصغر يمثل القوس الصغرى.

---

قياس الزاوية يساوي ½ ضرب ( قياس القوس الكبرى ناقص قياس القوس الصغرى)

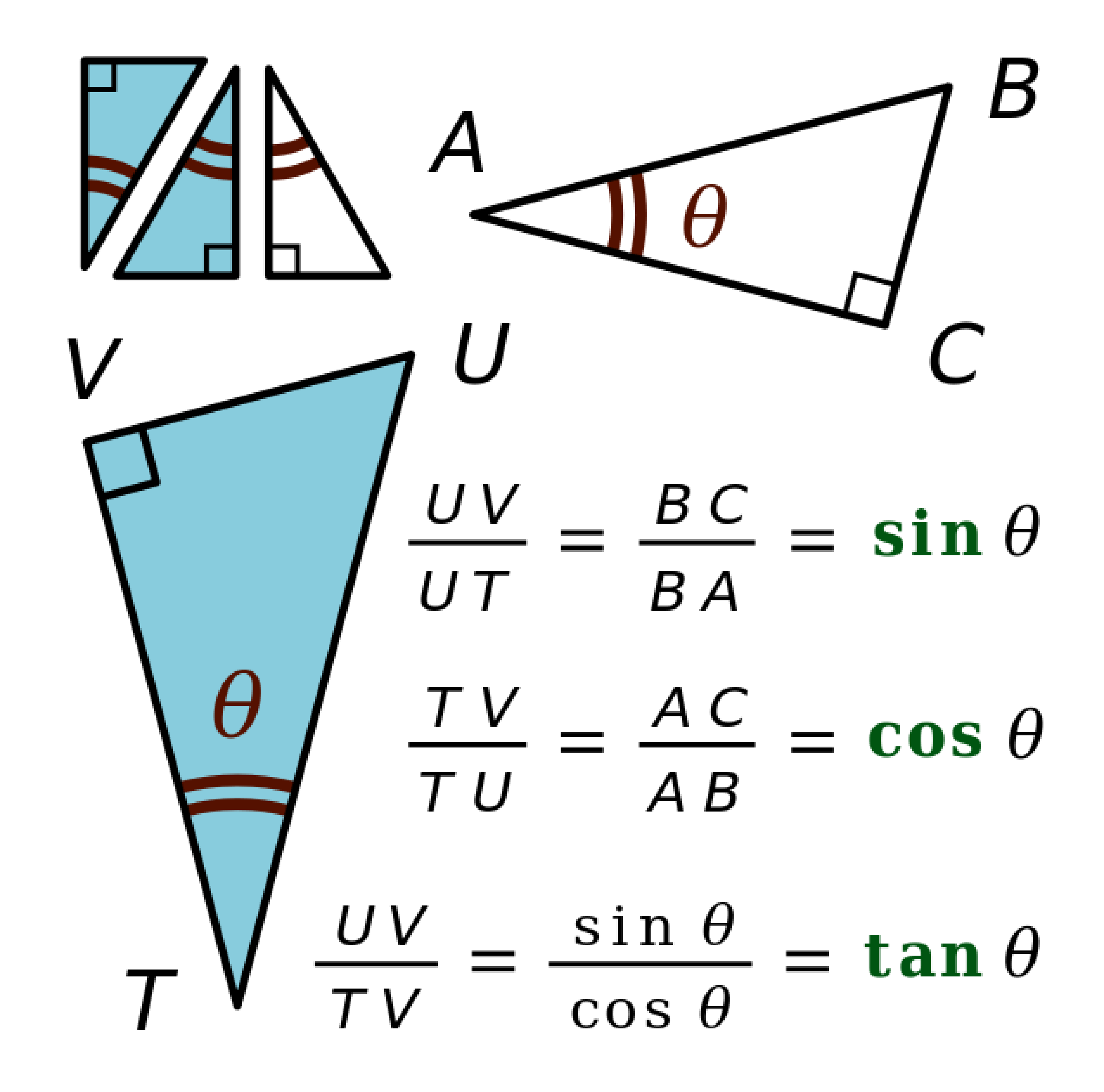
قياس الزاوية يساوي ½×( قياس القوس الكبرى - قياس القوس الصغرى) .

و بالطبع فإن القوس الخلفية هي القوس الكبرى لأن اتساع الزاوية يكون أكبر في نقطتي انطلاق المستقيمين من محيط الدائرة , أما القوس الأمامية فهي القوس الصغرى لأن المسافة بين المستقيمين تصبح أقل تمهيدا لالتقاء هذين المستقيمين في زاوية تقع خارج الدائرة.

---

# النسب المثلثية

---




أنتم تعلمون بالطبع بأن للمثلث القائم Right-Angled Triangle. ثلاثة أضلاع أي أن المثلث الذي يحوي زاوية قياسها 90 درجة ثلاثة أضلاع هي بالنسبة للزاوية الحادة الموجودة في ذلك المثلث :

---

□ الضلع المقابل Opposite : وهي الضلع المقابلة للزاوية الحادة في المثلث القائم وهي الضلع التي تشكل مع قاعدة المثلث الزاوية القائمة التي يبلغ قياسها 90 درجة.

الضلع المجاورة Adjacent : وهي الضلع المجاورة للزاوية الحادة.

الضلعين التين تشكلان الزاوية القائمة في المثلث القائم هما الضلع المقابل و الضلع المجاور.

وتر المثلث القائم Hypotenuse: وهو أطول ضلع في المثلث القائم.

الآن لدينا ثلاثة نسب في المثلث القائم هي :

---

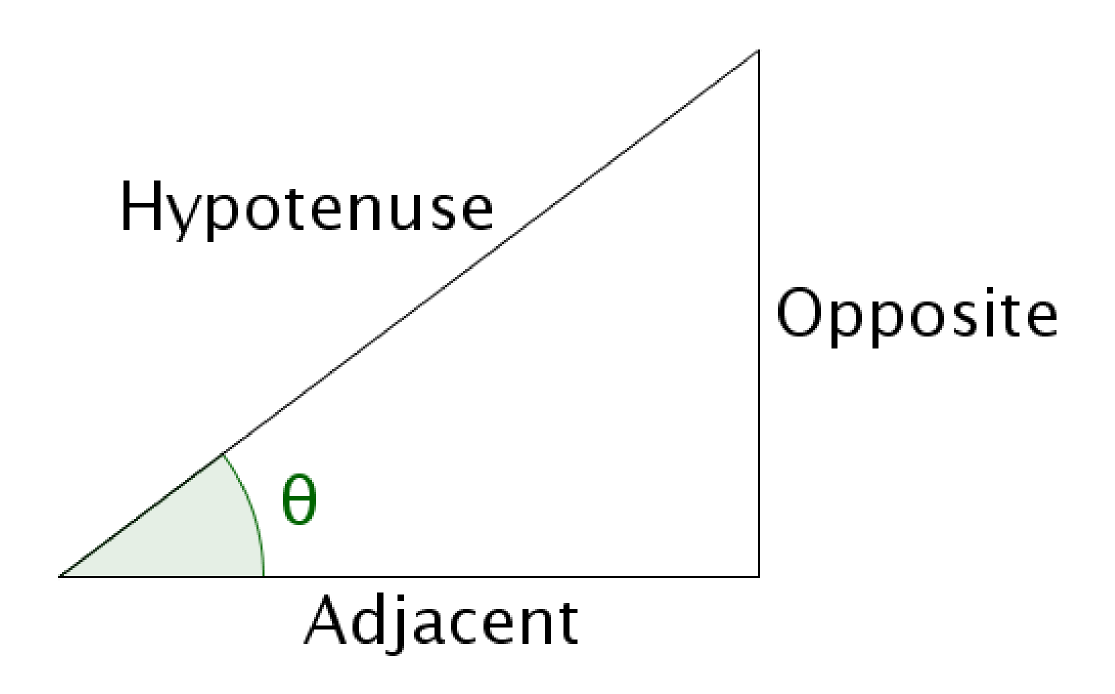
الجيب (ساين) Sine و اختصاره sin وهو يمثل نسبة الضلع المقابلة على الوتر :

Opposite/Hypotenuse

الضلع المقابلة / الوتر

أي أن الجيب (ساين) يمثل النسبة ما بين الضلع المقابلة و الوتر.

---




---

جيب التمام Cosine (كوساين : و اختصاره cos وهو يمثل النسبة ما بين الضلع المجاورة للزاوية الحادة في المثلث و بين وتر المثلث.

Adjacent/ Hypotenuse

---

الظل Tangent وهو يمثل نسبة الضلع المقابلة للضلع المجاورة opposite/Adjacent

الآن لو كان لدينا مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي على الشكل التالي :

الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 35 درجة يبلغ طوله 2.8 سنتمتر.

وتر المثلث القائم أي أطول أضلاع هذا المثلث يبلغ طوله 4.9 سنتمتر.

الضلع المجاور للزاوية التي يبلغ قياسها 35 درجة يبلغ طوله 4.0 سنتمتر.

الآن سوف نقوم بتطبيق حسابات النسب المثلثية بشكل عملي :

كم يبلغ جيب الزاوية 35 في المثلث السابق ؟

قلت سابقا بأن الجيب (ساين ) Sine و اختصاره sin وهو يمثل نسبة الضلع المقابل على الوتر, و كما قلت سابقا فإن طول الضلع المقابل في المثلث السابق يبلغ 2.8 سنتمتر بينما يبلغ طول وتر المثلث السابق 4.9 سنتمتر.

إذا فإن جيب الزاوية 35 درجة يساوي $\frac{2.8}{4.9}$ = 0.57 تقريبا .

جيب الزاوية 35 درجة يساوي طول الضلع المقابل أي 2.8 تقسيم طول وتر المثلث أي 4.9 :

2.8÷4.9=0.57

طبعا فإن الإجابة على الآلة الحاسبة تساوي :

0.57142857142857142857142857142857

---

الآن يمكننا حساب جيب الزاوية 35 درجة أو ساين sin الزاوية 35 درجة باستخدام الآلة الحاسبة دون إدخال أطوال أضلاع المثلث وذلك بالشكل التالي :

نكتب الرقم 35 بأزرار الآلة الحاسبة .

ننقر زر الجيب أي زر الساين sin على الآلة الحاسبة

فنحصل على الإجابة التالية وهو رقم شبيه بالرقم السابق :

0.57357643635104609610803191282616

كم يبلغ جيب تمام (كوساين) Cosine الزاوية 35 درجة في المثلث السابق:

---

جيب التمام Cosine (كوساين : و اختصاره cos وهو يمثل النسبة ما بين الضلع المجاور للزاوية الحادة في المثلث و بين وتر المثلث.

يبلغ طول الضلع المجاورة للزاوية 35 درجة في المثلث السابق 4.0 و يبلغ طول وتر المثلث 4.9 و بالتالي فإن جيب التمام أي الكوساين في المثلث السابق يساوي :

$\frac{4.0}{4.9}$=0.81

و تحديدا فإن الإجابة ستكون.

0.81632653061224489795918367346939

---

الآن يمكننا حساب جيب تمام الزاوية 35 درجة أو كوساين الزاوية 35 cosine درجة باستخدام الآلة الحاسبة دون إدخال أطوال أضلاع المثلث وذلك بالشكل التالي :

نكتب الرقم 35 بأزرار الآلة الحاسبة .

ننقر زر تمام الزاوية أي زر الكوساين cosine على الآلة الحاسبة

فنحصل على الإجابة التالية وهو رقم شبيه بالرقم السابق :

0.81915204428899178968448838591684

كم يبلغ ظل الزاوية 35 درجة في المثلث السابق؟

---

**يمثل الظل Tangent نسبة الضلع المقابل إلى الضلع المجاور opposite/Adjacent**

في المثلث السابق يبلغ طول الضلع المقابلة 2.8 بينما يبلغ طول الضلع المجاورة 4.0 و بالتالي فإن ظل الزاوية 35 درجة في المثلث السابق يساوي:

$\frac{2.8}{4.0}=0.7$

2.8÷4.0=0.7

---

**الآن يمكننا حساب ظل الزاوية 35 درجة أو Tangent الزاوية 35 درجة باستخدام الآلة الحاسبة دون إدخال أطوال أضلاع المثلث وذلك بالشكل التالي :**

**نكتب الرقم 35 بأزرار الآلة الحاسبة .**

**ننقر زر ظل الزاوية أي زر Tangent على الآلة الحاسبة**

**فنحصل على الإجابة التالية وهي رقم شبيه بالرقم السابق :**

0.7002075382097097794585227194448З

و بذلك نكون قد استوعبنا فكرة النسب المثلثية الثلاث : الجيب و جيب التمام و الظل.

---

□ كما لاحظتم سابقا فإن بإمكاننا أن نحسب جيب و جيب تمام و ظل الزاوية في المثلث القائم عن طريق قسمة أطوال أضلاع المثلث القائم على بعضها البعض , كما أن بإمكاننا أن نحصل على هذه النسب المثلثية ذاتها عن طريق الآلة الحاسبة بإدخال قياس الزاوية إلى الآلة الحاسبة و الضغط على أحد أزرار حساب النسب المثلثية التي ذكرتها سابقا دون إدخال أطوال أضلاع المثلث.

---

□ ليست هنالك أية علاقة ما بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية و بين النسب المثلثية بمعنى أن النسب المثلثية تبقى كما هي سواء أكان المثلث كبيرا أو صغيرا.

---

□ ما هي الفائدة العملية للنسب المثلثية؟

تمكننا معرفة النسب المثلثية من حساب طول ضلع مجهول أو حساب زاوية مجهولة .

مثال :

سفينة راسية في البحر طول حبل مرساتها 50 متر بينما تقوم تيارات المياه بسحب السفينة و لذلك فإن حبل المرساة يشكل زاوية مائلة مقدارها 40 درجة مع قاع البحر .

احسب عمق المياه في الموقع الذي ترسو فيه تلك السفينة.

نتخيل المسألة على النحو التالي :

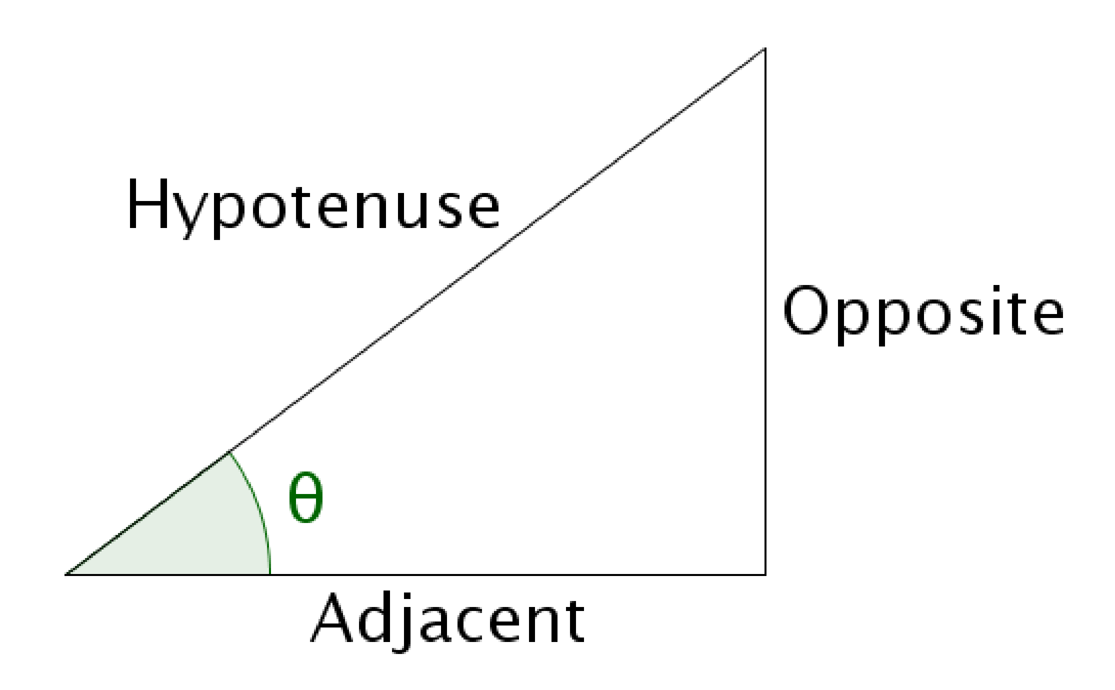
حبل المرساة المائل يشكل وتر مثلث قائم الزاوية يمتد ما بين نقطة ما على سطح البحر (السفينة) و بين نقطة ما على قاع البحر (المرساة التي تثبت السفينة) .

يشكل وتر المثلث أي الحبل زاوية مقدارها 40 درجة مع قاع البحر.

قاع البحر هو الضلع المجاور للزاوية 40 درجة.

عمق البحر هو الضلع القائم الذي يصنع مع قاع البحر زاوية قائمة قياسها 90 درجة و هذا الضلع القائم هو مجهول المسألة.

---




الضلع المجاورة Adjacent أو قاعدة المثلث= قاع البحر.

وتر المثلث Hypotenuse : حبل المرساة المائل لأن التيارات البحرية تسحب السفينة.

الضلع المقابلة للزاوية opposite أو الضلع القائمة: هي عمق البحر و هي تمثل مجهول هذه المسألة.

يشكل الحبل المائل (وتر المثلث) مع قاع البحر ( الضلع المجاورة) زاوية يبلغ قياسها 40 درجة.

□ برأيكم أي نسبة مثلثية سنستخدم في هذه المسألة ؟

لدينا مجهول يتوجب علينا اكتشافه و هو عمق البحر في ذلك الموقع أي الضلع القائم للمثلث و هو يمثل الضلع المقابلة للزاوية 40 درجة.

---

**لدينا معلومين هما طول حبل المرساة المائل و هو يمثل وتر المثلث القائم و يبلغ طوله 50 متر.**

**لدينا زاوية ميلان حبل تثبيت السفينة و هي 40 درجة.**

**إذا فإننا سنستخدم قاعدة حساب جيب الزاوية (الساين) sine و التي تساوي :**

**sin ساين = الضلع المقابلة للزاوية تقسيم وتر المثلث .**

نعوض بالأعداد فنقول :

$\text{Sin}40=\frac{X}{50}$

Sin40=X/50

جيب الزاوية (ساين) التي قياسها 40 درجة تساوي الضلع المقابل المجهول X تقسيم 50 متر .

نعكس طرفي المعادلة فتصبح :

X/50=sin 40

$\frac{X}{50}=\text{sin}40$

---

**ملاحظة :**

**يمكننا حساب جيب الزاوية (الساين sine ) بإحدى طريقتين :**

الطريقة الأولى : أن ندخل قياس الزاوية إلى الآلة الحاسبة ثم أن نضغط زر قياس جيب الزاوية (ساين) sin .

الطريقة الثانية : أن نقسم الضلع المقابلة للزاوية على وتر المثلث.

هذا الأمر ينطبق على جميع النسب المثلثية الأخرى أي جيب تمام الزاوية (الكوساين)cos و الظل tan

---

نستخدم الآلة الحاسبة في حساب جيب الزاوية 40 درجة .

ندخل الرقم 40 إلى الآلة الحاسبة ثم نضغط زر حساب جيب الزاوية ساين sin فنحصل على قيمة جيب الزاوية 40 و هي :

0.64278760968653932632264340990726

---

علينا الانتباه إلى ناحية هامة عند حساب النسب المثلثية و هي أننا لا نستخدم قياس الزاوية و إنما فإننا نستخدم جيب أو جيب تمام (كوساين) أو ظل tan الزاوية و لهذا السبب فإننا لم نستخدم قياس الزاوية 40 درجة في هذه المسألة و إنما فإننا قمنا باستخدام جيب الزاوية 40 درجة لإيجاد مجهول المسألة الذي هو الضلع القائم أو عمق البحر.

و هكذا بعد أن قمنا بحساب جيب الزاوية 40 درجة يصبح لدينا مجهول واحد في المعادلة X و هو يمثل الضلع القائم المقابل للزاوية 40 و هو يمثل كذلك عمق البحر في ذلك الموقع.

كما يصبح لدينا معلومين و هما طول وتر المثلث القائم أي 50 متر و قيمة جيب الزاوية 40 درجة.

فتصبح المعادلة على الشكل التالي :

المجهول X أي عمق البحر أو طول الضلع المقابل للزاوية يساوي طول وتر المثلث 50 ضرب قيمة جيب الزاوية :

---

X=50×0.64278760968653932632264340990726

و حصيلة عملية الضرب تساوي
32.139380484326966316132170495363

إذا فإن عمق البحر في ذلك الموقع يبلغ 32 متر تقريبا .

أهملنا الكسور التي أتت بعد الفاصلة العشرية.

كما تذكرون عندما تحدثنا عن حل المعادلات الجبرية فإننا نجري العمليات الرياضية بين معلومين لاكتشاف المجهول الثالث ولهذا السبب فإننا نقلب المعادلة بحيث تصبح عملية رياضية بين معلومين لاكتشاف المجهول الثالث .

و كما تلاحظون فإننا في المسألة السابقة عندما طبقنا نسبة حساب جيب الزاوية sin حصلنا على المعادلة التالية التي تحوي معلومين و مجهول واحد هو X :

$\frac{X}{50}$=sin40

و هذه المعادلة تتضمن عملية قسمة أي قسمة المجهول X على 50 و نتيجة عملية القسمة هذه هي جيب الزاوية 40 درجة و هي قيمة معلومة , و كما مر معنا في بحث المعادلات الجبرية فإن حل مثل هذه المعادلة يستدعي منا أمرين اثنين و هما :

أولا : أن نقلب المعادلة بحيث تصبح عملية رياضية بين معلومين اثنين ذلك أنه ما من فائدة ترجى من إجراء عملية رياضية على مجهول مثل المجهول X مثلا.

ثانيا : أن نعكس عملية القسمة فنحولها إلى عملية ضرب .

وبذلك تصبح العملية على النحو التالي :

50×sin40=X

نحسب جيب الزاوية 40 باستخدام الآلة الحاسبة فتصبح لدينا العملية التالية:

50×0.64278760968653932632264340990726

=X

و بذلك نتمكن من حل المسألة باستخدام النسب المثلثية.

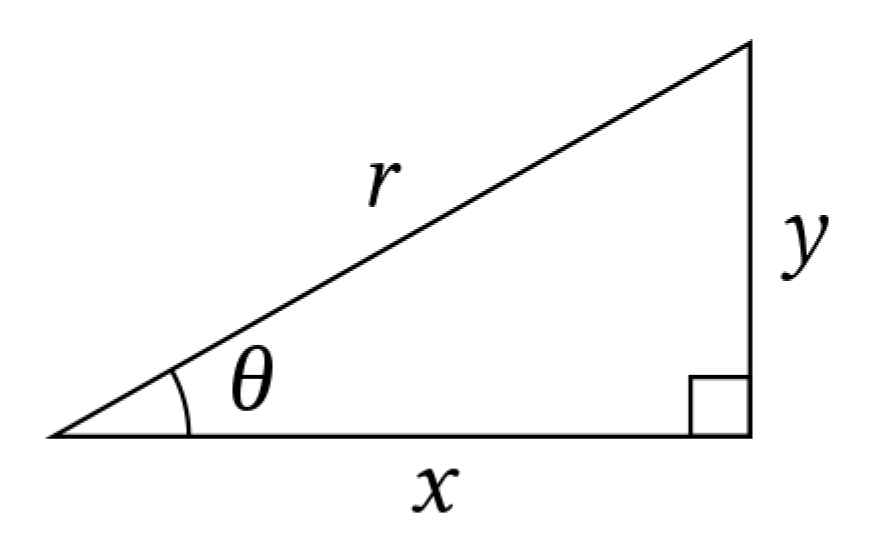
و بالطبع فإنك عندما تتقن استخدام النسب المثلثية فلن تحتاج إلى القيام بكل تلك الخطوات .

---

# مسألــة

طائرة ورقية مثبتة بالأرض بخيط يبلغ طوله 25 متر و تقوم الرياح بسحب الطائرة الورقية مما يؤدي إلى ميلان خيط الطائرة الورقية و تبلغ زاوية ميلان الخيط 41 درجة - كم يبلغ ارتفاع الطائرة الورقية عن سطح الأرض؟

لنتخيل المسألة على شكل مثلث قائم الزاوية :




---

خيط الطائرة الورقية المائل هو وتر المثلث القائم r-
زاوية التقاء الخيط r مع الأرض X تبلغ 41 درجة

ارتفاع الطائرة عن الأرض : أي طول الضلع القائم في المثلث مجهول و هو هنا الضلع y

آخر نقطة يسقط إليها ظل الطائرة على الأرض هي زاوية المثلث القائمة .

بمعنى أن هذه الطائرة الورقية لو سقطت بشكل أفقي على الأرض فإنها ستسقط فوق نقطة تلاقي الضلع العمودي مع قاعدة المثلث أي أنها ستسقط عند زاوية المثلث القائمة.

البعد الحقيقي الأفقي للطائرة الورقية عن مكان تثبيت خيطها بالأرض تمثله قاعدة المثلث أي الضلع المجاور للزاوية و هو هنا الضلع X.

---

برأيكم أي النسب المثلثية تناسب هذه المسألة؟

إن هذه المسألة تتحدث عن الوتر r: و هو خيط الطائرة الورقية الذي يبلغ طوله 25 متر كما تتحدث عن زاوية قياسها 41 درجة و هي زاوية ميلان خيط الطائرة كما تتحدث عن ضلع قائم Y يمثل ارتفاع الطائرة الورقية عن سطح الأرض كما أنه يمثل الضلع المقابل للزاوية 41 درجة.

إن النسبة المثلثية التي تلزمنا في هذه المسألة هي النسبة التي تتحدث عن الضلع المقابل للزاوية الحادة Y و التي تتحدث كذلك عن الوتر r:

---

**الجيب (ساين) Sine و اختصاره sin و هو يمثل نسبة الضلع المقابل Y على الوتر X:**

**Opposite/Hypotenuse**

**الضلع المقابل / الوتر**

**أي أن الجيب (ساين) يمثل النسبة ما بين الضلع المقابل و الوتر.**

نحسب جيب الزاوية 41 درجة على الآلة الحاسبة:

ندخل الرقم 41 إلى الآلة الحاسبة ثم نضغط زر جيب الزاوية ساين sin فنحصل على جيب الزاوية 41 درجة.

0.65605902899050728478249596402342

الآن تصبح المعادلة على الشكل التالي:

---

$\sin 0.65 = ?/25$

$\sin 0.65 = y/25$

$\sin 0.65 = \frac{Y}{25}$

---

كما ترون أصبحت لدينا عملية قسمة تتضمن قسمة المجهول Y على المعلوم 25 و ناتج عملية القسمة هو جيب الزاوية 0.65 , و كما مر معنا في بحث حل المعادلات الجبرية فإنه ما من فائدة ترجى من إجراء العمليات الرياضية على المجاهيل مثل المجهول Y و لهذا السبب فإننا نقلب هذه المعادلة لتصبح عملية رياضية بين معلومين و هما الرقمين 0.65 و 25 .

و كما مر معنا في بحث حل المعادلات الجبرية فإن حل المعادلة الرياضية التي تحوي مجهولا ما يتطلب منا أن نقوم بعكس العملية الرياضية في تلك المعادلة ولذلك فإننا نقوم بتحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب .

---

و بذلك فإن عملية القسمة $\sin 0.65 = \frac{Y}{25}$ تتحول إلى عملية ضرب بين معلومين :

$Y = 0.65 \times 25$

$0.65 \times 25 = 16.40$

المجهول Y الذي يمثل الضلع القائم في المثلث يساوي جيب الزاوية 0.65 ضرب وتر الزاوية 25 متر :

$0.65 \times 25 = 16.40$

إذا فإن قيمة المجهول Y تبلغ 16.40

أي أن طول الضلع القائم يبلغ 16.40 متر و هذا يعني بأن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض يبلغ 16.40 متر تقريبا .

---

□ دائما عندما تختلط عليك الأمور و عندما تجد نفسك في مواجهة معادلة لا تعرف كيفية حلها اكتب على ورقة مسودة معادلة مماثلة و لكن بأعداد بسيطة

و هذه المعادلة البسيطة سترشدك إلى طريقة الحل .

---

**كيف أتأكد من صحة العمليات التي قمت بها و صحة النتيجة التي وصلت إليها في مسائل النسب المثلثية ؟**

**أنتم تعلمون بالطبع بأن صيغ النسب المثلثية تكون على الشكل التالي :**

**جيب الزاوية 41 مثلا أي ساين الزاوية 41 يساوي طول الضلع المقابل على الوتر و لذلك و بكل بساطة فإنني بعد أن أحسب جيب الزاوية أو ظلها أو تمام جيبها على الآلة الحاسبة و بعد أن أجري الحسابات التي تمكنني من اكتشاف الضلع المجهول فإنني أقسم هذين الضلعين على بعضهما البعض فإذا كان ناتج القسمة مساويا لجيب أو ظل الزاوية فإن هذا يعني بأن حساباتي صحيحة .**

**في المثال السابق مثلا قلنا بأن جيب (ساين sin ) الزاوية 41 درجة يبلغ 0.65 تقريبا .**

**و يبلغ طول الوتر 25 بينما يبلغ طول الضلع المقابل للزاوية 16.40**

**نقول 16.40تقسيم 25**

**16.40÷25=0.65**

**و أنتم تعلمون بأن جيب (ساين sin ) الزاوية 41 درجة يبلغ 0.65 تقريبا .**

**إذا فإن حساباتنا صحيحة.**

---

خطوات التحقق من صحة حساب النسب المثلثية :

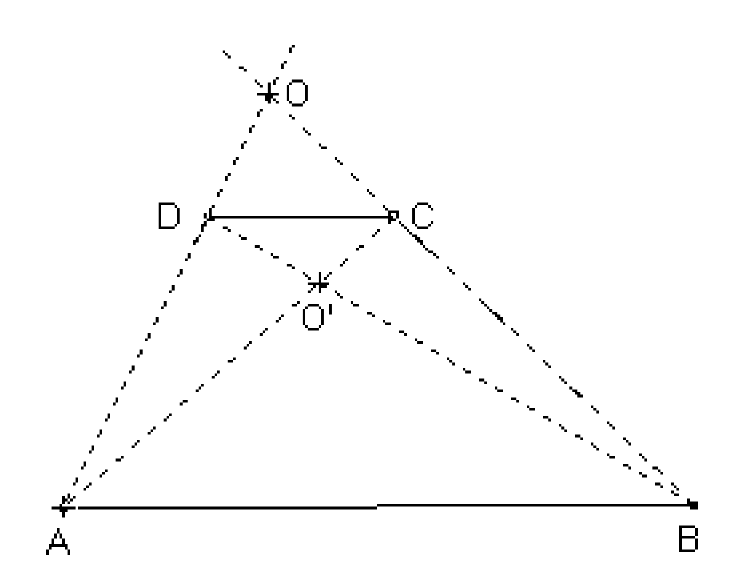
احسب جيب أو تمام جيب أو ظل الزاوية كما هو مطلوب منك.

احسب قياس الضلع المجهول .

بعد اكتشاف طول الضلع المجهول في المثلث اقسم طول الضلعين على بعضهما البعض و فق ما تقتضيه النسبة المثلثية و في حال كانت نتيجة القسمة مماثلة لجيب أو ظل الزاوية فإن هذا يعني بأن حساباتنا صحيحة.

---

## قاعدة مثلثية :

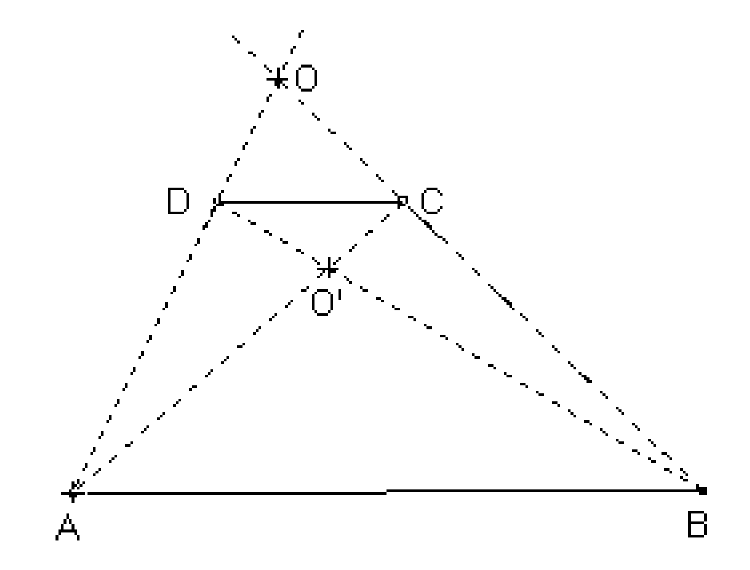



---

في المثلثات المتقابلة بالرأس تكون الزوايا متطابقة بينما تكون الأضلاع متناسبة.

فإذا علمنا أطوال ثلاثة أضلاع في مثلثين متشابهين متقابلين بالرأس وذوي زوايا متطابقة أصبح بإمكاننا اكتشاف طول الضلع المجهول الطول في أي من هذين المثلثين.

---




المثلثين ODC و OAB هما مثلثين متقابلين بالرأس O و بالتالي فإن زوايا هما متطابقة و متماثلة في القياس بينما أضلاعهما متناسبة في الطول.

فنقول مثلا بأن :

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{DC}$$

لنفترض بأن طول الضلع AB يساوي 18 سنتمتر و أن طول الضلع DC يساوي 6 سنتمتر و أن طول الضلع AO يساوي 12 سنتمتر و أن طول الضلع OC مجهول .

المطلوب :

احسب طول الضلع المجهول OC .

لمعرفة طول ضلع مجهول فإننا ننشئ معادلة تناسب على شكل كسرين متناسبين يحويان طرفا مجهولا فنكتب مثلا:

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{DC}$$

ثم نعوض بالأرقام المتوفرة لدينا و نرمز بالحرف Y مثلا للضلع المجهول طوله :

$12/Y=18/6$

$$\frac{12}{Y}=\frac{18}{6}$$

لحل هذا التناسب فإننا نجري عملية ضرب تصالبي على شكل حرف X :

$12\times6=72$

$18\times Y=18Y$

و بذلك تصبح لدينا معادلة بطرفين اثنين فقط:

$18Y=72$

لدينا في هذه المعادلة عملية ضرب 18Y أي $18\times Y$ و لحل هذه المعادلة فإننا نعكس عملية الضرب و نحولها إلى عملية قسمة لأن عملية القسمة هي العملية المعاكسة لعملية الضرب وبذلك فإننا نقوم بتحويل عملية الضرب :

$18Y=72$

$72=Y\times18$

إلى عملية قسمة فنكتب:

$72\div18=4$

إذا فإن المجهول Y يساوي 4 .

أي أن طول الضلع OC يساوي 4 سنتمتر .

---

| **تذكر دائما :**<br>**لحل معادلة كسرية تحوي كسرين متناسبين فإننا نجري عملية ضرب تصالبي على شكل حرف X بين الكسرين.** |
|---|

$\frac{12}{Y}=\frac{18}{6}$

نضع نتيجة عملية الضرب التصالبي على شكل عملية مساواة:

18Y=72

أي

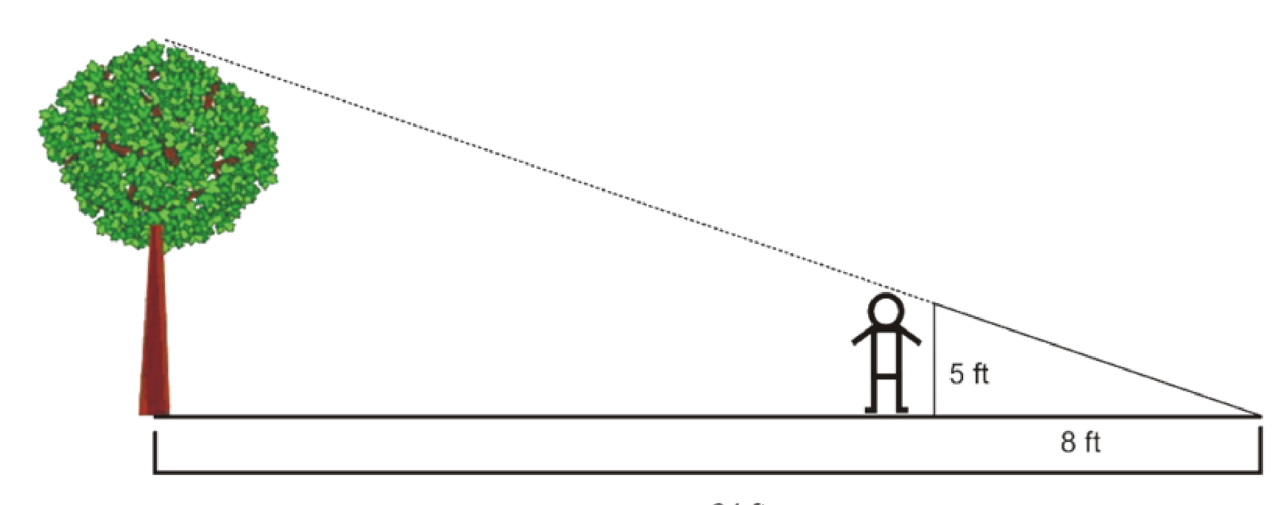
72=Y×18

لحل المعادلات فإننا نقوم بعكس العملية الرياضية و بذلك فإننا نحول عملية الضرب إلى عملية قسمة.

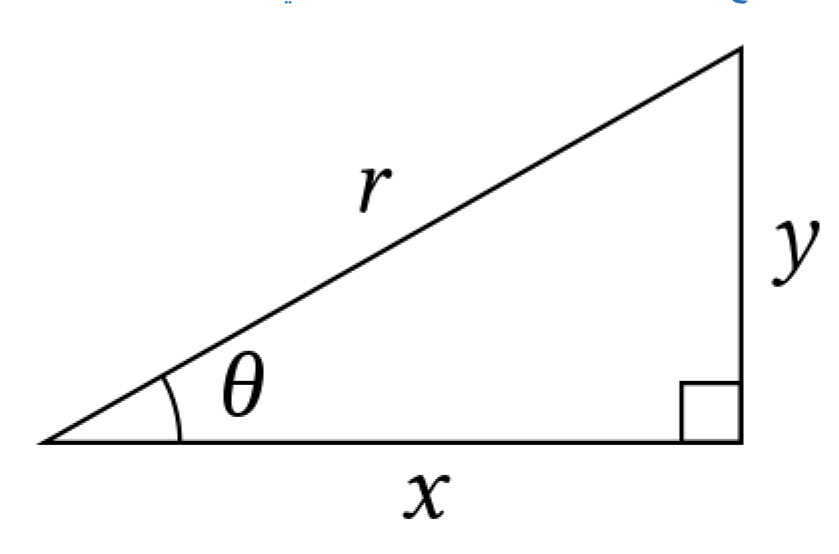
و بما أنه ما من فائدة ترجى من إجراء العمليات الرياضية على عنصر مجهول مثل العنصر Y فإننا نجري عملية القسمة بين معلومي المعادلة : أي العددين المحددين و نضع العنصر المجهول كنتيجة لتلك المعادلة:

72÷18=4

# استخدام الظل في القياس



لنفترض بأننا نريد قياس ارتفاع شجرة أو عمود أو تمثال ما دون أن نضطر إلى تسلق ذلك الشيء -إن بإمكاننا معرفة ارتفاع ذلك الشيء عن طريق قياس طول ظله فإذا كان ذلك الشيء شجرة مثلا فإننا نعتبر بأن تلك الشجرة تمثل الضلع القائم في المثلث أي الضلع Y . كما نعتبر بأن الظل الذي تلقيه تلك الشجرة على الأرض يمثل قاعدة المثلث أي الضلع x أما المسافة الوهمية ما بين آخر نقطة في ظل الشجرة و بين قمة الشجرة فإنها تمثل وتر المثلث القائم الزاوية r, أي الضلع المائل الأكثر طولا في المثلث.




نقوم بوضع عصى بطول معروف بجانب الشجرة ثم نقيس طول ظل هذه العصى و بذلك تصبح لدينا القياسات التالية :

القياس الأول هو طول ظل الشجرة .

القياس الثاني هو طول ظل العصى .

القياس الثالث هو طول العصى.

كما يصبح لدينا مجهول واحد و هو ارتفاع الشجرة : أي ارتفاع الضلع القائم Y في المثلث الوهمي الذي تخيلناه .

الآن لحساب ذلك المجهول Y, أي الارتفاع الحقيقي للشجرة أو الضلع القائم Y في المثلث فإننا نقيم معادلة تناسب فنكتب:

**ارتفاع الشجرة أو طول الضلع القائم في المثلث تقسيم طول ظل الشجرة يساوي طول العصا تقسيم طول ظل العصا**

**ارتفاع الشجرةY / طول ظل الشجرة = طول العصا / طول ظل العصا**

الآن نعوض بأعداد حقيقية :

فإذا كان طول العصا 3 أمتار مثلا و إذا كان طول ظلها مترين و إذا كان طول ظل الشجرة عشرة أمتار فإن المعادلة ستصبح على الشكل التالي :

ارتفاع الشجرة (مجهول)Y على طول ظل الشجرة 10 أمتار = طول العصا 3 أمتار على طول ظل العصا (مترين) :

Y/10=3/2

$$\frac{Y}{10}=\frac{3}{2}$$

الآن نجري عملية ضرب تصالبية أي عملية ضرب على شكل حرف X فنقول :

10×3=30

2×Y=2Y

**و بعد إجراء عمليتي الضرب التصالبي هاتين يصبح لدينا طرفين فقط في المعادلة فتصبح المعادلة على الشكل التالي:**

**2Y=30**

**و أنتم تعلمون طبعا بأن 2Y تعني 2×Y و هذا يعني بأن :**

**2×Y=30**

و لحل هذه المعادلة فإننا بالطبع نعكس عملية الضرب , أي أننا نحول عملية الضرب $2\times Y=30$

إلى عملية قسمةبين المعلومين 30 و 2 لأنه ما من فائدة ترجى من إجراء العمليات الرياضية بين المجاهيل :

$30\div 2=15$

و بالطبع فإن $15\times 2=30$

و هذا يعني بأن المجهول Y يساوي 15 , أي أن طول الضلع القائم في المثلث , أي أن طول هذه الشجرة يبلغ 15 مترا .

---

## مبدأ القياس بالظل :

في المسألة السابقة كما هي الحال في جميع مسائل القياس بالظل فإننا نضع شيئا ذو طول معروف (عصى مثلا ) في ظروف الإضاءة ذاتها و نقيس ظله و نقيم علاقة تناسب بين طول ذلك الشيء و طول ظله ثم نقيس طول ظل شيء مجهول و نقيم علاقة تناسب بين طول ظل ذلك الشيء المجهول و بين طوله ثم نحل المسألة على ذلك الأساس.

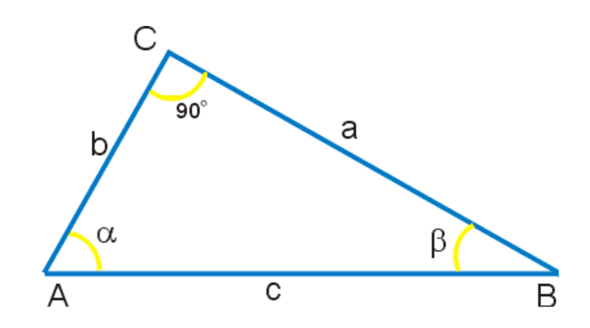
---

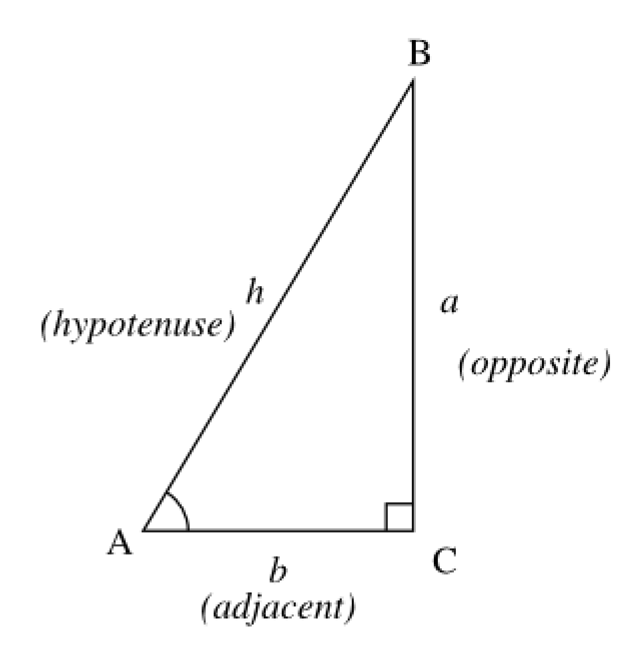
إننا نفترض بأن هنالك علاقة تناسب ما بين طول شيئين و طولي ظليهما إذا كانا موضوعين في ظروف الإضاءة ذاتها .

---

## القياس المثلثي Trigonometry

---



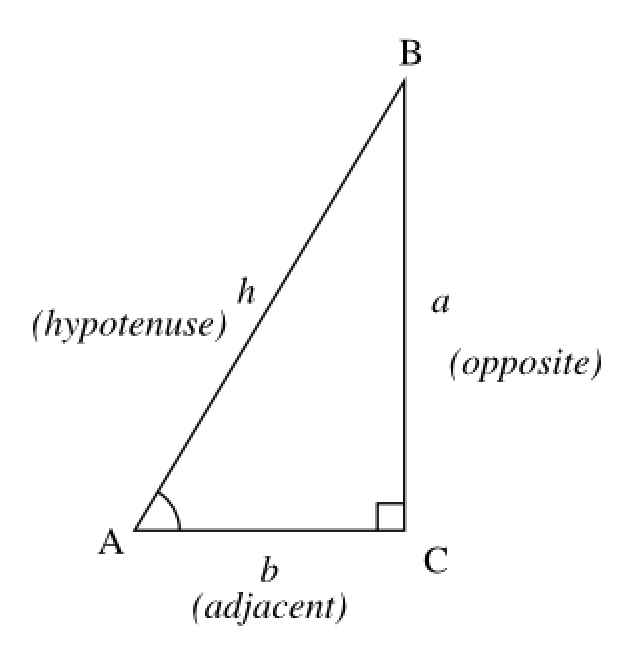




تعتمد طريقة القياس المثلثي على تقدير المسافات اعتمادا على التناسب بين طول أضلاع المثلث القائم الزاوية و وفقا لطريقة القياس المثلثي فإنه في جميع المثلثات القائمة التي يكون قياس زواياها متطابقا يكون هنالك تناسب بين أطوال أضلاعها كذلك فإذا عرفنا طول بعض أضلاع تلك المثلثات المتطابقة من حيث قياس زواياها أصبح بإمكاننا معرفة قياس أضلاعها المجهولة.

و لحساب طول ضلع مجهول ما بين مثلثين ذوي زوايا متطابقة فإننا نقيم علاقة تناسب بين المثلثين :

---

# عودة إلى موضوع النسب المثلثية في المثلث القائم :




---

نسبة الضلع المقابل للزاوية المتطابقة a إلى وتر المثلث القائم h = جيب الزاوية - ساين sine -sin

نسبة الضلع المجاور للزاوية المتطابقة أي الضلع b إلى وتر المثلث h = جيب تمام الزاوية - كوساين Cos .

نسبة الضلع المقابل للزاوية المتطابقة أي الضلع aإلى الضلع المجاور للزاوية المتطابقة أي الضلع b = ظل الزاوية tant .

---

حتى لا تنسى هذه النسب المثلثية تذكر كلمة " سوه - كاه - توا " SOH-CAH-TOA .

الآن تذكر ما ترمز له هذه الأحرف :

S هو الحرف الأول من كلمة ساين sine و هي تعني جيب الزاوية sin .

Oهو الحرف الأول من كلمة المقابل Opposite و التي تشير إلى الضلع المقابل للزاوية .

H هو الحرف الأول من كلمة Hypotenuse و التي تعني " وتر المثلث" و هو الضلع المائل في المثلث, و هو بالطبع أطول أضلاع المثلث القائم.

C هو الحرف الأول من كلمة كوساين Cos .

A هو الحرف الأول من كلمة مجاور Adjacent أي الضلع المجاور للزاوية أو الضلع الملاصق للزاوية.

الآن لو عدنا إلى كلمة سوه-كاه-توا SOH-CAH-TOA فإنها تعني :

SOH أي أن جيب الزاوية ساين Sain يساوي الضلع المقابل للزاوية Opposite مقسوما على وتر المثلث Hypotenuse .

كلمة كاه CAH و تعني جيب تمام الزاوية كوساين Cosine يساوي الضلع المجاور Adjacent مقسوما على وتر المثلث hypotenuse .

كلمة توا TOA و تعني ظل الزاوية tangent يساوي الضلع المقابل opposite مقسوما على الضلع المجاور adjacent .

---

إن هذه النسب المثلثية الثلاثة تمكننا من حساب طول أي ضلع مثلث مجهول في مثلثين ذوي زوايا متطابقة اعتمادا على حقيقة أن المثلثات ذات الزوايا المتطابقة أي الزوايا ذات القياس الواحد تكون أضلاعها متناسبة مع بعضها البعض من حيث الطول فإذا علمنا أطوال بعض أضلاعها و قياس بعض زواياها يصبح بإمكاننا حساب أطوال أضلاعها الأخرى.

---

## كيف نطبق النسب المثلثية السابقة ؟

لدينا مثلث قائم الزاوية يبلغ قياس زاويته 90 درجة و يبلغ قياس زاويته المقابلة للزاوية القائمة 32 درجة و يبلغ طول وتره 12 سنتمتر .

ما هو طول الضلع القائم في هذا المثلث ( أي الضلع المقابل للزاوية التي يبلغ قياسها 32 درجة ؟

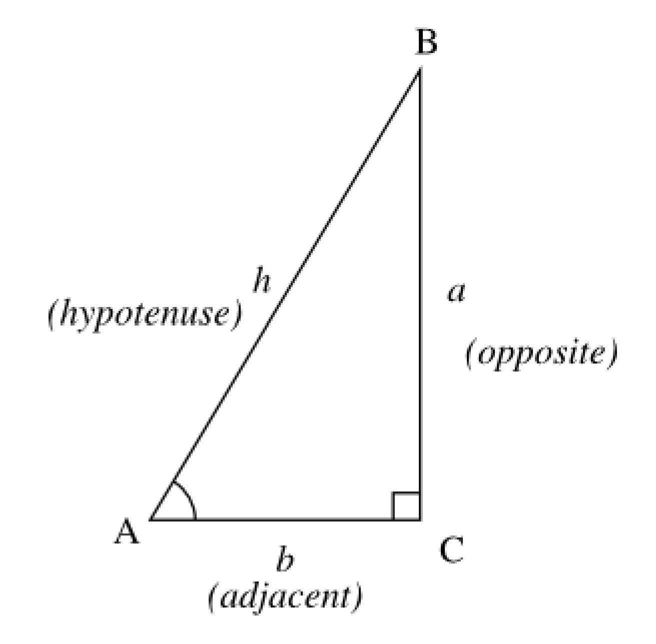
لحل هذه المسألة نقوم أولا برسم مثلث و تثبيت قياسات الأضلاع و الزوايا التي نعرفها عليها , و بالطبع فإن قياس الزوايا في مثلث قائم نعلم قياس إحدى زاويتيه الأخريين هو أمر محسوم لأنكم تعلمون بأن قياس زوايا أي مثلث يجب أن يكون 180 درجة حتما , و نحن نعلم بأن مثلثنا هذا هو مثلث قائم أي أنه يحوي زاوية قائمة قياسها بالطبع 90 درجة , كما أنه يحوي زاوية قياسها 32 درجة , فكم يبلغ قياس الزاوية الثالثة ؟

بالطبع يجب حتما أن يكون قياسها 58 درجة لأن :

$$32+90+58=180$$

و لدينا في هذا المثلث الوتر الذي نعلم بأن طوله 12 سنتمتر .

---




الآن , برأيكم أي نسبة من النسب المثلثية الثلاثة السابقة سنستخدم في هذه المسألة ؟

نظرا لأن هذه المسألة تتعلق بالضلع المقابل للزاوية التي قياسها 32 درجة حيث أنهم قد طلبوا منا أن نحسب طوله , كما أنها تتعلق كذلك بوتر المثلث لأنهم أعطونا قياسه و لذلك فإننا نستخدم النسبة المثلثية ساين sine , أي نسبة الجيب sin و تنص هذه النسبة المثلثية على أن جيب الزاوية يساوي نسبة الضلع المقابل للزاوية إلى الوتر .

---

**الآن لدينا معادلة الجيب (ساين) sin التالية :**

**جيب sin=الضلع المقابل (مجهول) / وتر المثلث**

---

**نقوم الآن بحساب جيب الزاوية 32 درجة على الآلة الحاسبة و ذلك بإدخال الرقم 32 و هو بالطبع قياس الزاوية في المثلث إلى الآلة الحاسبة ومن ثم نضغط على زر الجيب (ساين ) sin فنحصل على جيب هذه الزاوية و هو 0.5 تقريبا .**

نعوض بالأرقام فتصبح معادلة الجيب على الشكل التالي :

---

0.5=y/12

---

$0.5=\frac{y}{12}$

تفيد المعادلة السابقة بأن 0.5 يساوي Y تقسيم 12 .

0.5=Y÷12

---

لحل هذا المعادلة نعكس عملية القسمة و أنتم تعلمون بأن عملية الضرب هي العملية المعاكسة لعملية الضرب و بذلك تصبح لدينا المعادلة التالية :

0.5×12=Y

Y=6

أي أن المجهول Y يساوي 6 تقريبا .

أي أن طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 32 درجة في هذا المثلث يبلغ 6 سنتمتر.

ملاحظة : جيب الزاوية 32 هو بالضبط :

0.52991926423320495404678115181609

و لذلك فإن نتيجة العمليات السابقة لن تكون 6 تماما .

و يمكننا استخدام النسب المثلثية في معرفة ارتفاع شيء ما عن طريق قياس ظل ذلك الشيء و لتحقيق ذلك فإننا نقوم بالآتي :

نقوم بقياس ظل ذلك الشيء الذي نريد معرفة طوله و ليكن شجرة مثلا .

نضع شيئا نعرف طوله الحقيقي عصى مثلا بجوار الشجرة التي تريد قياس طولها .

نقيس ظل تلك العصى .

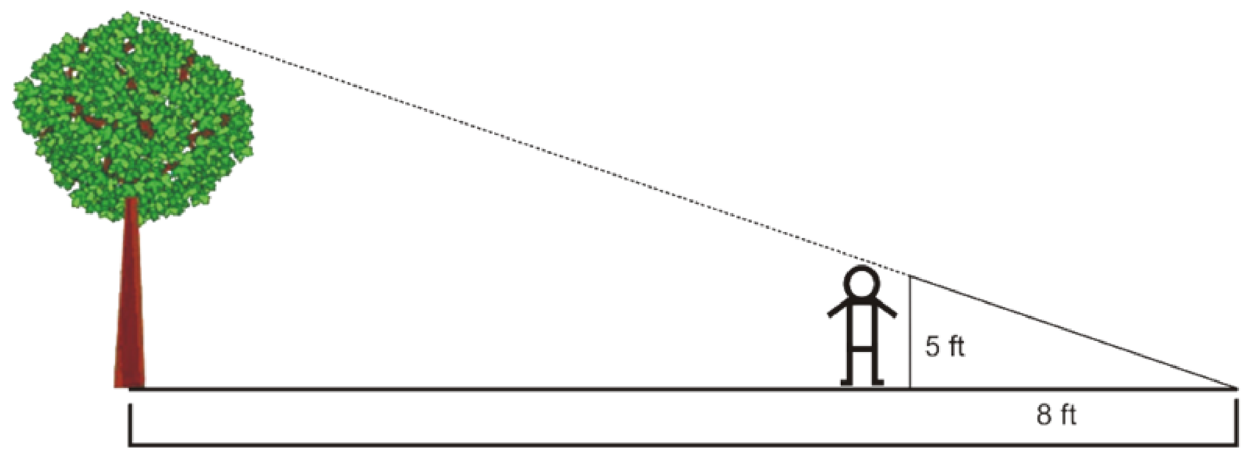
---

نقوم بمقارنة ظل العصا مع ظل الشجرة و طول العصا مع طول الشجرة و ننشئ كسرين متناسبين المجهول فيهما هو بالطبع طول الشجرة فنقول :

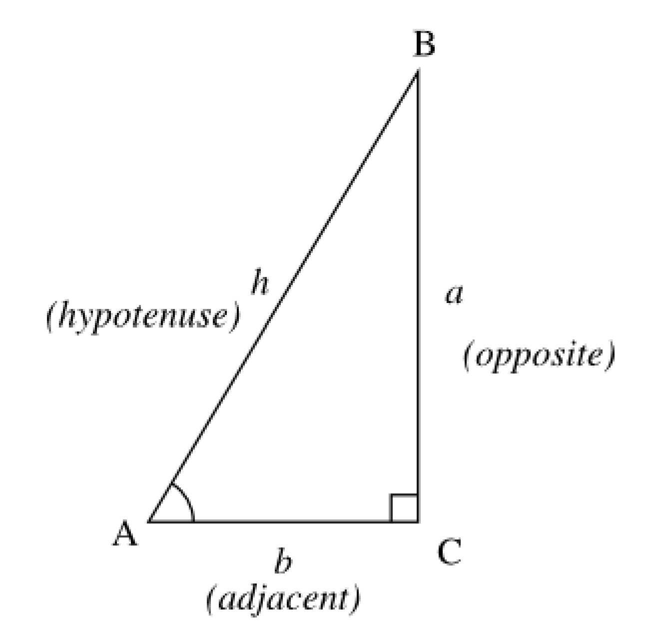
طول الشجرة (مجهول) X على طول ظل الشجرة يساوي طول العصا على طول ظل العصا. ثم نقم بحل هذه المعادلة بإجراء عملية ضرب تصالبي على شكل حرف X فيصبح لدينا طرفين نجري عملية قسمة فنحصل على طول الشجرة .

و نحن بإمكاننا قياس ارتفاع الشجرة أو العمود أو أي شيء آخر باستخدام النسب المثلثية دون استخدام أي شيء مساعد آخر , أي دون استخدام عصى أو ما شابه ذلك و لتحقيق ذلك فإننا نقوم بالتالي:

قف عند آخر نقطة يصل إليها ظل الشجرة أو ظل أي شيء تريد معرفة ارتفاعه .




قم بقياس الزاوية التي تقع ما بين الأرض و أعلى نقطة في الشجرة , وبذلك يصبح لدينا مثلث و هي قائم الزاوية .




إن ارتفاع هذه الشجرة يمثل ضلع المثلث المقابل لزاوية الرؤية أي الضلع a و يمكننا القول بأن الضلع a يمثل الشجرة ذاتها .

إن ظل الشجرة الذي تلقيه على الأرض يمثل الضلع المجاور للزاوية A أي الضلع b .

إن ارتفاع الشجرة هو الضلع المقابل للزاوية A.

أعلى نقطة في الشجرة هي النقطة B .

آخر نقطة يصل ظل الشجرة إليها هي النقطة A .

إذا لدينا قياس الزاوية و يبلغ 35 درجة و لدينا طول ظل الشجرة و يبلغ 15 مترا و لدينا مجهول و هو ارتفاع الشجرة .

---

لدينا في هذه المسألة ضلع مقابل للزاوية أي الضلع a و هو المجهول الذي يمثل ارتفاع الشجرة

و لدينا ضلع مجاور للزاوية A وهو الضلع b و هو طول ظل الشجرة و الذي يبلغ 15 مترا , أي أنه لدينا في هذه المسألة ضلع مقابل و ضلع مجاور للزاوية فأي النسب المثلثية تنطبق على هذه الحالة ؟

إنها نسبة الظل tan .

نحسب ظل الزاوية tan على الآلة الحاسبة فنحصل على 0.70 تقريبا .

---

لحساب ظل الزاوية على الآلة الحاسبة :

ندخل قياس الزاوية : وهو هنا 35 درجة .

نضغط زر حساب ظل الزاوية أي الزر tan .

فنحصل على ظل الزاوية 35 درجة و الذي يساوي:

0.70020753820970977945852271944483

---

نقول : الظل tan يساوي الضلع المقابل على الضلع المجاور .

نعوض بالأرقام الموجودة لدينا :

Tan 0.70=Y/15

Tan $0.70=\frac{y}{15}$

---

و كما تلاحظون فإن هذه النسبة المثلثية هي عبارة عن عملية قسمة المجهول y على 15 أما ناتج القسمة فهو قياس ظل الزاوية الذي يساوي تقريبا 0.70

أي أن y تقسيم 15 = 0.70

Y÷15=0.70

---

و كما تعلمون فإن حل هذه المعادلات يتطلب منا القيام بأمرين :

الأمر الأول : أن نعكس عملية القسمة فنحولها إلى عملية ضرب.

الأمر الثاني : أن نجري عملية الضرب بين معلومي المعادلة بحيث نجعل من مجهول المعادلة نتيجة عملية الضرب إذ لا فائدة ترجى من إجراء العمليات الرياضية على عنصر مجهول.

---

0.70 ضرب 15 يساوي المجهول Y

$0.70 \times 15 = 10.5$

إذا ضربنا ظل الزاوية 35 أي 0.70 بالعدد 15 فإن الناتج يكون :

10.503113073145646691877840791672

إذا فإن طول هذه الشجرة يبلغ 10.5 متر تقريبا .

كيف نتأكد من صحة ما قمنا به ؟

أنتم تعلمون بأن النسبة المثلثية هي عبارة عن عملية قسمة نتيجتها هي قياس ظل الزاوية :

---

$$Tan\ 0.70 = Y/15$$

$$Tan\ 0.70 = \frac{y}{15}$$

و كنا قد اعتمدنا على كل من قياس ظل الزاوية أي 0.70 و طول ظل الشجرة أي 15 لمعرفة ارتفاع الشجرة و الذي بلغ وفقا لحساباتنا نحو 10.5 متر تقريبا .

أي أن المجهول y يساوي تقريبا 10.5 .

---

$$Tan\ 0.70 = \frac{10.5}{15}$$

الآن إذا كانت حساباتنا صحيحة يتوجب أن نحصل على الرقم 0.70 تقريبا إذا قسمنا 10.5 على 15 :

نقسم 10.5 على 15 :

10.5÷**15=0.70**

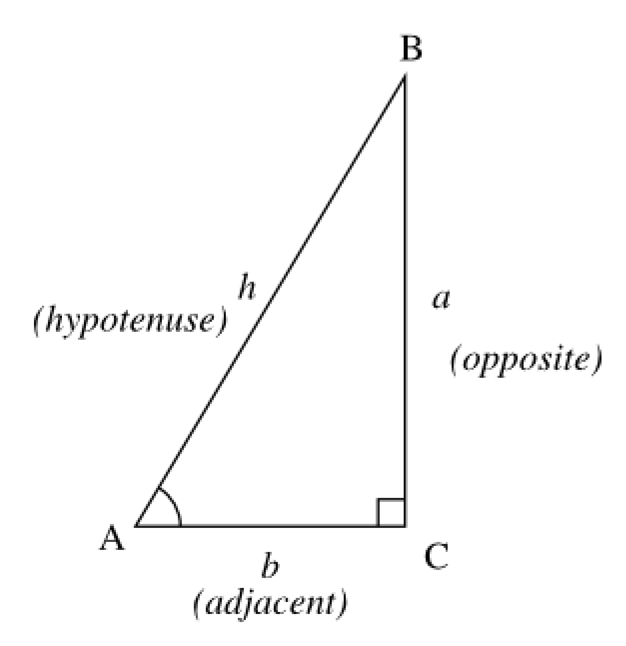
**إذا فإن العملية التي قمنا صحيحة .**

---

مسألة :

---

بعد إقلاع طائرة بزاوية قدرها X درجة انفجرت في الجو على ارتفاع X متر و سقطت على الأرض على بعد X متر من النقطة التي بدأت إقلاعها منها .




أثناء إقلاع طائرة من النقطة A بزاوية قدرها قياس الزاوية A و بعد أن قطعت مسافة قدرها h انفجرت في الجو في النقطة B على ارتفاع يساوي a من على سطح الأرض ثم سقطت على الأرض في النقطة C على بعد قدره b من نقطة الانطلاق A .

إذا :

زاوية إقلاع الطائرة هي الزاوية A .

المسافة التي قطعتها الطائرة قبل أن تنفجر هي وتر المثلث h .

موقع انفجار الطائرة هو النقطة B .

---

انفجرت الطائرة في الجو عندما كانت على ارتفاع يماثل طول الضلع القائم a وهو الضلع المقابل لزاوية الانطلاق A .

البعد بين النقطة التي أقلعت الطائرة بها من الأرض A و بين الموقع الذي سقطت فيه على الأرض C يمثله الضلع المجاور b .

الآن بعد أن تخيلت المسألة على شكل مثلث قائم أصبحت جاهزا لحساب أي مسافة تطلب مني:

فإذا قيل لي بأن الطائرة سقطت في النقطة C على بعد X متر من نقطة إقلاعها و طلب مني أن أحسب المسافة التي قطعتها الطائرة وهي صاعدة قبل أن تنفجر و تم إعطائي قياس زاوية إقلاع الطائرة .

يكون لدي حينها :

قياس زاوية إقلاع الطائرة أي الزاوية A .

قياس الضلع المجاور لزاوية الإقلاع وهو الضلع b الذي يمثل المسافة بين نقطة إقلاع الطائرة أي النقطة A : أي آخر نقطة لمست فيها الطائرة الأرض قبل إقلاعها و نقطة سقوط الطائرة على الأرض وهي النقطة C .

و المطلوب مني قياس المسافة التي قطعتها الطائرة صعودا في الجو قبيل انفجارها وهي المسافة التي يمثلها طول وتر المثلث القائم h .

فأي النسب المثلثية سأستخدم حينها ؟

تتحدث هذه المسألة عن زاوية إقلاع و ضلع مجاور لزاوية الإقلاع و وتر المثلث و لذلك أستخدم :

---

**جيب تمام الزاوية كوساين Cosine لأنه يساوي الضلع المجاور Adjacent مقسوما على وتر المثلث hypotenuse .**

و أول خطوة أقوم بها تتمثل في قياس جيب تمام الزاوية (كوساين) :

ادخل قياس الزاوية إلى الآلة الحاسبة ثم اضغط زر قياس جيب تمام الزاوية كوساين cos فأحصل على جيب تمام هذه الزاوية ثم اكتب المعادلة الكسرية التالية :

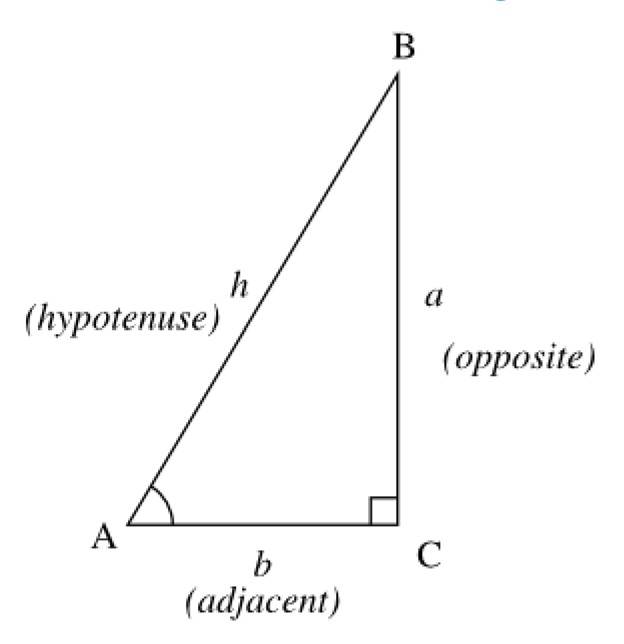
جيب تمام الزاوية يساوي طول الضلع المجاور b مقسوما على طول وتر المثلث h وهو هنا مجهول المعادلة .

---

ثم أقوم بحل هذه المعادلة بالطريقة التي تعرفونها أي أنني أحول عملية القسمة إلى عملية ضرب بين معلومين و هما هنا قياس جيب تمام الزاوية و طول الضلع المجاور b .

للتأكد من صحة العملية التي قمت بها اقسم طول الضلع المجاور b على طول وتر المثلث h الذي قمنا بحسابه سابقا على اعتبار أنه يمثل المسافة التي قطعتها الطائرة صعودا في الجو قبل أن تنفجر فإذا كانت نتيجة عملية القسمة مساوية لجيب تمام الزاوية فإن هذا يعني بأن العملية التي قمت بها صحيحة .

انتهى




ماذا لو أعطاني قياس زاوية إقلاع الطائرة A و المسافة التي قطعتها الطائرة صعودا في الجو قبل أن تنفجر : أي طول وتر المثلث h و طلب مني أن احسب الارتفاع الذي انفجرت فيه الطائرة عن سطح الأرض و الذي يمثله الضلع المقابل a ؟

أي النسب المثلثية سأستخدم عند ها ؟

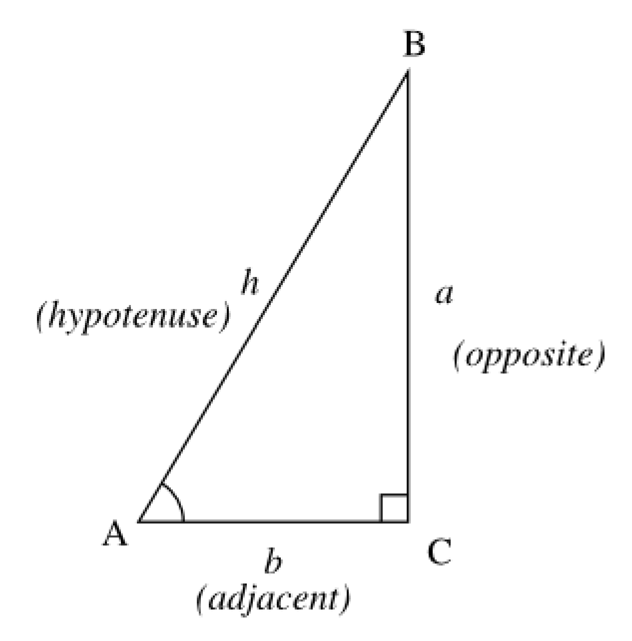
لدي هنا زاوية الإقلاع A و طول و تر المثلث و مجهول هو الضلع المقابل a الذي يمثل ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض عند انفجارها و لذلك فإنني استخدم معادلة قياس جيب الزاوية الساين :

---

| **الجيب (ساين) sin :** |
|---|
| **جيب sin=الضلع المقابل (مجهول) / وتر المثلث** |

الخطوة الأولى تتمثل في قيامي بقياس جيب الزاوية على الآلة الحاسبة :

ادخل قياس زاوية إقلاع الطائرة A إلى الآلة الحاسبة ثم أضغط زر قياس جيب الزاوية (الساين) sin ثم أنشئ معادلة قياس الجيب وفق الخطوات التي تعلمونها و بعد ذلك أتأكد من صحة العملية التي قمت بها عن طريق قسمة الضلع المقابل على وتر المثلث فإذا كانت نتيجة القسمة مساوية لقياس جيب زاوية المثلث فإن ذلك يعني بأن العملية التي قمت بإجرائها صحيحة .




ماذا لو أعطاني زاوية صعود الطائرة أي قياس الزاوية A و الارتفاع الذي انفجرت عنده الطائرة عن سطح الأرض و الذي يمثله الضلع a و هو الضلع المقابل لزاوية الإقلاع A و طلب مني أن أحسب المسافة بين النقطة التي أقلعت منها الطائرة أي النقطة A و النقطة التي سقطت فيها الطائرة على الأرض أي النقطة C .

---

ما هي النسبة المثلثية التي يتوجب علي استخدامها عند ها ؟

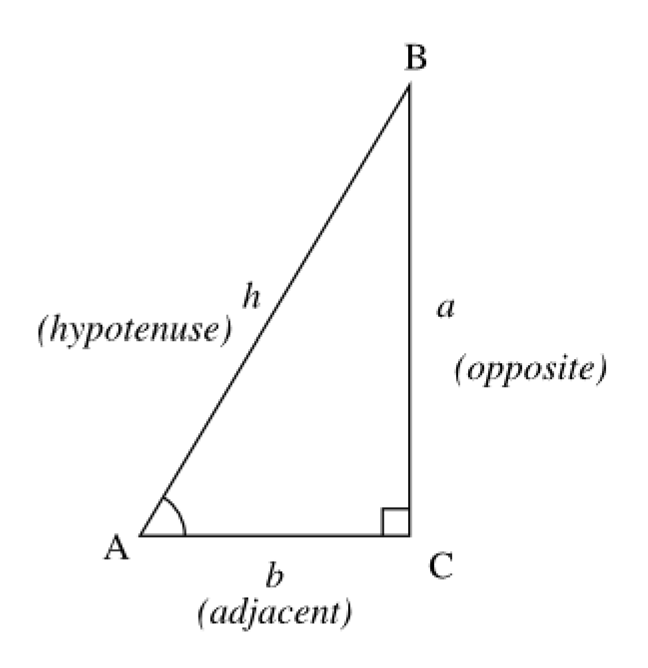
إنها النسبة المثلثية التي تتحدث عن قياس زاوية المثلث وضلع مجاورb و ضلع مقابلa وهي بالطبع الظل :

---

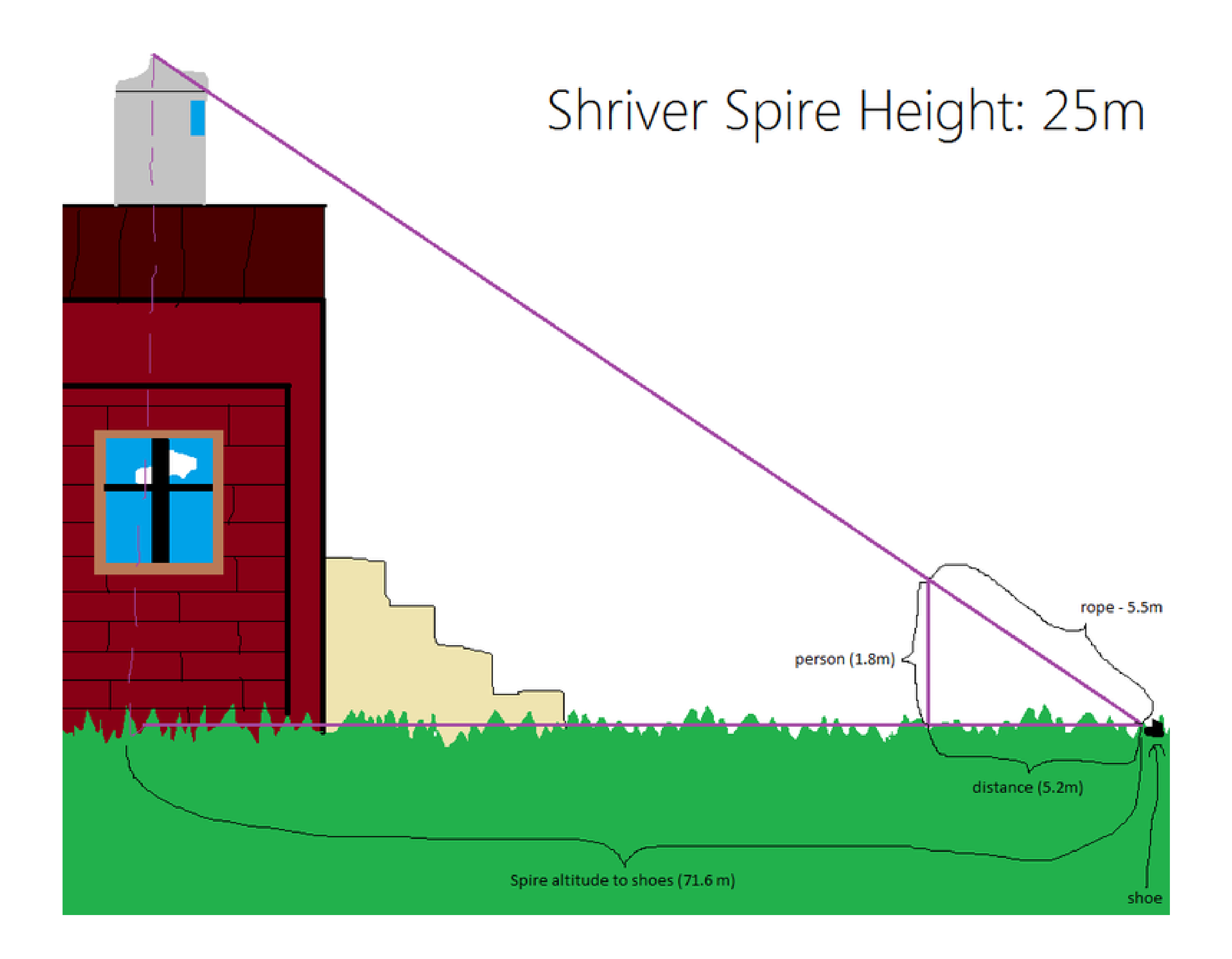
**الظل tan يساوي الضلع المقابل على الضلع المجاور.**

الخطوة الأولى تتمثل في قيامي بقياس ظل الزاوية على الآلة الحاسبة :

ادخل قياس زاوية إقلاع الطائرة A إلى الآلة الحاسبة ثم أضغط زر قياس ظل الزاوية (التان) tan ثم أنشئ معادلة قياس الظل وفق الخطوات التي تعلمونها و بعد ذلك أتأكد من صحة العملية التي قمت بها عن طريق قسمة الضلع المقابل على الضلع المجاور فإذا كانت نتيجة القسمة مساوية لقياس ظل زاوية المثلث فإن ذلك يعني بأن العملية التي قمت بإجرائها صحيحة .




---




# مساحة الدائرة

يبلغ محيط الدائرة أكثر قليلا من ثلاثة أضعاف طول قطر الدائرة .

قانون حساب محيط الدائرة :

$C = \pi d$

C مساحة الدائرة

D قطر الدائرة

π - باي : هي نسبة قطر الدائرة إلى محيطها و هي تعادل تقريبا :

3.14

π - باي : ثابت رياضي mathematical constant يمثل النسبة بين قطر الدائرة و محيطها و يدعى باي كذلك باسم ثابت أرخميدس Archimedes' constant.

يشير هذا الثابت الرياضي إلى أن محيط أي دائرة يبلغ ثلاثة أضعاف قطرها .

يمكنك التأكد من هذا الأمر بنفسك باستخدام مقياس للأشياء المنحنية مثل مقياس الخياطين (الميزورو) - قم بقياس الإطار الجلدي لعجلة الدراجة ( محيط الدائرة) ثم قم بقياس قطر عجلة الدراجة : أي المسافة التي تمتد بين نقطتين على محيط الدائرة شريطة أن تمر بمركز الدائرة (مركز العجلة الذي يحوي محور العجلة) .

---

**إن محيط الدائرة يساوي قطر الدائرة ضرب الثابت باي π الذي يساوي 3.14 تقريبا**

**22/7 $\frac{22}{7}$.**

---

**استيعاب مساحة الدائرة .**

أحضر علبة جبنة دائرية

أخرج القوالب المثلثية الشكل الموجودة فيها و التي تشكل دائرة بتجمعها مع بعضها البعض .

قم بصف قوالب الجبنة تلك إلى جانب بعضها البعض بشكل متناوب : رأس مع قاعدة و ليس رأسا مقابل رأس و بهذه الطريقة فإنك لن تحصل على شكل دائري و إنما ستحصل على شكل رباعي متوازي الأضلاع تقريبا .

إن ضلع أي قالب جبنة مثلثي الشكل هو عبارة عن نصف قطر لأنه يمتد ما بين محيط الدائرة و مركزها .

تحوي علبة الجبنة الدائرية 8 قوالب مثلثية الشكل و عندما نرصف قوالب الجبنة بالتناوب بجانب بعضها البعض بحيث تكون رؤوس 4 قوالب متجهة نحو الأعلى و رؤوس4 قوالب متجهة نحو الأسفل فإننا نحصل على شكل متوازي الأضلاع .

إن قاعدة متوازي الأضلاع هذا , أي أرضيته تساوي نصف محيط الدائرة .لماذا؟

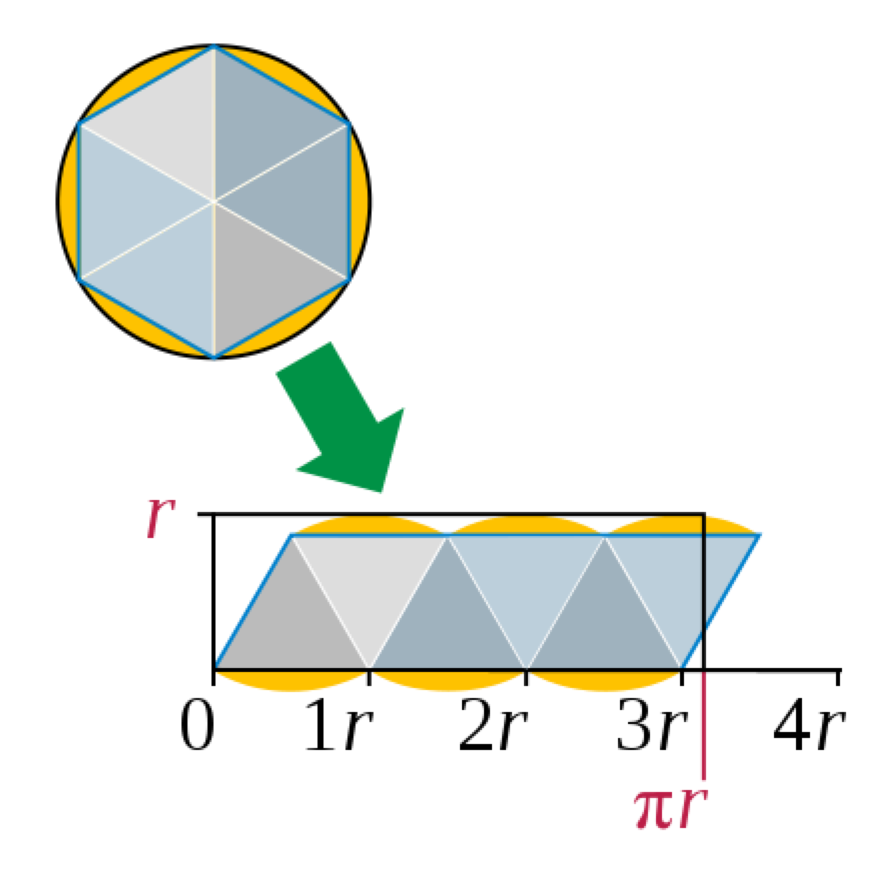
لأن محيط الدائرة يتألف من تجمع قواعد 8 قوالب جبنة مثلثية .

إن مساحة متوازي الأضلاع التي حصلنا عليها بهذه الطريقة هي حاصل ضرب الارتفاع , أي ارتفاع أي قالب جبنة ضرب طول القاعدة التي تتألف من تجمع 4 قواعد جبنة مثلثية الشكل.

تحليل ما قمنا به :

لدينا شكل دائري منقسم إلى 8 أجزاء مثلثية (قوالب الجبنة ) و قد قمنا بتفكيك تلك الدائرة إلى شبه مثلثات ثم شكلنا من تلك المثلثات متوازي أضلاع - إن مساحة متوازي الأضلاع التي حصلنا عليه هي حاصل ضرب الارتفاع : أي ارتفاع أي قالب جبنة بطول القاعدة التي تتألف من تجمع 4 قوالب جبنة .

طبعا لدينا قاعدة سفلية تتألف من تجمع 4 قوالب جبنة و قاعدة علوية تتألف كذلك من تجمع 4 قوالب جبنة .




---

**مفهوم المساحة : تعني المساحة مسح الشيء أي تغطية سطحه بالكامل و هذا يتطلب ضرب إحداثيات الشكل الهندسي العمودية بإحداثياته الأفقية بحيث لا تبقى أي نقطة خارج المسح.**

مثال عن حساب مساحة الدائرة :

كم تبلغ مساحة دائرة يبلغ طول نصف قطرها 7 سنتيمتر؟

---

**مساحة الدائرة تساوي الثابت باي π ضرب نصف قطر الدائرة مرفوعا للقوة الثانية أي $\pi r^2$ .**

$A= \pi r^2$

لدينا نصف قطر الدائرة يبلغ 7 سنتمتر و إذا رفعناه للقوة الثانية نحصل على :

---

$7\wedge2=7^2=7\times7=49$

مربع نصف قطر الدائرة يساوي 49

أما الثابت باي π فإنه يساوي $\frac{22}{7}$ أي تقريبا 3.141592653589793238462 .

فنقول :

$154 = 49\times3.141592653589793238462$

π

□ كيف أرفع نصف قطر الدائرة للقوة الثانية على الآلة الحاسبة :

أدخل الرقم الذي يمثل طول نصف قطر الدائرة ,وهو هنا العدد 7 لأنه العدد الذي نريد رفعه للقوة الثانية .

اضغط زر الرفع للقوة وهو الزر $X^Y$ .

اضغط العدد 2 لأننا نريد رفع العدد 7 الذي هو نصف قطر الدائرة للقوة الثانية .

اضغط زر المساواة = فنحصل على النتيجة 49 وهي تمثل نصف القطر مرفوعا للقوة الثانية .

يدويا الرفع للقوة الثانية يستدعي ضرب العدد بنفسه :

$7\times7=49$

كيف أحسب الثابت باي π

على الآلة الحاسبة بالطريقة الصحيحة ؟

سنتعلم سويا كيف نحسب الثابت باي π

بالطريقة الصحيحة :

لو أنك اعتبرت بأن الثابت باي π

يساوي 3.14 و أجريت حسبتك على هذا الأساس و قمت بضرب مربع نصف القطر بهذا العدد فإنك بالتأكيد ستحصل على نتيجة خاطئة .

**إن الثابت باي π كما تعلمون يساوي $\frac{22}{7}$ و حتى أضرب هذا الكسر بمربع نصف القطر فلا بد من أن أقوم بتحويله إلى رقم اعتيادي نوعا ما و لذلك أقول بأن 22 على 7 تعني 22 تقسيم 7 و لذلك فإني أجري عملية القسمة التالية على الآلة الحاسبة :**

**22÷7=**

**فأحصل على رقم فلكي مؤلف من أكثر من ثلاثين خانة .**

**أبقي هذا الرقم كما هو على شاشة الآلة الحاسبة و أقوم بضربه بمربع نصف قطر الدائرة بعد أن قمت بحسابه وفق الطريقة التي ذكرتها سابقا و بذلك فإنني أحصل على نتيجة صحيحة .**

مثال توضيحي آخر :

كم تبلغ مساحة دائرة يبلغ نصف قطرها 10 سنتيمتر ؟

أقول بأن مساحة الدائرة تساوي مربع نصف القطر ضرب الثابت باي π .

أولا أحسب مربع نصف قطر الدائرة :

$10^2=10\times10=100$

إذا فإن مربع نصف قطر هذه الدائرة يبلغ 100 .

الآن نحسب نتيجة ضرب الثابت باي π بمربع نصف قطر الدائرة فنكتب :

الثابت باي π يساوي $\frac{22}{7}$ .

$\frac{22}{7}$ يساوي 22 تقسيم 7 .

22÷7=

أجري هذه العملية على آلة حاسبة لأن ناتج عملية الضرب سيكون رقما فلكيا .

أضرب ناتج عملية الضرب الذي هو الثابت باي بمربع نصف قطر الدائرة أي العدد 100 :

فأحصل على نتيجة تساوي تقريبا 314 سنتمتر مربع و هذه النتيجة تمثل مساحة الدائرة.

---

□ هنالك كسر آخر يكافئ الثابت باي π و هو الكسر 355/113 355 على 113 .

$$\frac{355}{113}$$

اقسم 355 على 113 فتحصل على

355÷113=3.1415929203539823008849557522124

---

و إذا كانت الآلة الحاسبة التي تمتلكها آلة حاسبة علمية فإن هنالك طريقة أكثر سهولة للتعامل مع الثابت باي π وذلك باستخدام الزر π الموجود على الآلة الحاسبة .

في كل مرة تضغط فيها زر الثابت بايπ فإن هذا يماثل قيامك بإدخال الرقم الذي يمثله هذا الثابت فعندما تضغط على هذا الزر سيتم إدخال قيمة هذا الثابت بشكل آلي .

مثال :

احسب نتيجة ضرب الثابت باي π بالعدد 7 :

7× π =

21.991148575128552669238503682957

نضغط زر العدد 7 .

نضغط زر الضرب ×

نضغط زر الثابت باي π

نضغط زر المساواة = فنحصل على نتيجة عملية الضرب.

و هذه الطريقة أفضل و أسرع بكثير من الطريقة السابقة .

تذكر دائما :

محيط الدائرة يساوي قطر الدائرة ضرب الثابت باي π.

**محيط الدائرة = قطر الدائرة d ×π**

**( و ليس نصف قطر الدائرة)**

**مساحة الدائرة تساوي الثابت باي π ضرب نصف قطر الدائرة مرفوعاً للقوة الثانية.**

**مساحة الدائرة=الثابت باي $\pi \times r^2$**

نصف قطر الدائرة r و ليس قطر الدائرة d .

---

# مساحة و حجم الكرة

جميع النقاط الموجودة على سطح الكرة تبعد المسافة ذاتها عن مركزها .

حساب مساحة سطح الكرة:

قانون حساب سطح الكرة :

$4\times \pi \times r^2$

4 ضرب الثابت باي π ضرب نصف القطر مرفوعا للقوة الثانية .

---

حجم الكرة :

$$\text{Volume} = (^4/_3) \times \pi \times r^3$$

حجم الكرة يساوي الكسر (3/4) ضرب الثابت باي π ضرب نصف قطر الدائرة مرفوعا للقوة الثالثة .

حجم الكرة يساوي الكسر 4/3 ضرب الثابت باي π ضرب نصف القطر مرفوعا للقوة الثانية.

---

# المخروط Cone

مساحة المخروط :

تساوي مساحة المخروط مساحة قاعدة المخروط ضرب المساحة الجانبية للمخروط .

---

**و بما أن قاعدة المخروط عبارة عن دائرة فإن مساحتها تساوي الثابت باي π ضرب مربع نصف القطر :**

$\pi r^2$

**مساحةقاعدة المخروط تساوي نصف قطر الدائرة r مرفوعا للقوة الثانية ضرب الثابت باي π الذي يساوي $\frac{22}{7}$.**

مثال:

ما هي مساحة سطح مخروط يبلغ نصف قطر قاعدته 10 سنتمتر و يبلغ ارتفاعه المائل 15 سنتمتر؟

لحل هذه المسألة فإننا نقوم أو بإيجادمساحة قاعدة المخروط , و كما تعلمون فإن قاعدة المخروط دائرية الشكل , و كما تعلمون فإن مساحة الدائرة تساوي الثابت باي $\frac{22}{7}\pi$

ضرب نصف قطر الدائرة r مرفوعا للقوة الثانية .

نصف قطر قاعدة المخروط الدائرية الشكل يبلغ 10 سنتمتر .

---

مربع نصف قطر قاعدة المخروط أي $10^2$ يساوي $10\times10 = 100$ .

مساحة قاعدة المخروط الدائرية تساوي 100 ضرب الثابت باي **π**:

$100\times\frac{22}{7}=$

كما رأينا في السابق فإننا لحساب الثابت باي أي الكسر $\frac{22}{7}$ فإننا نقسم 22 على 7 باستخدام الآلة الحاسبة :

22÷7=3.1428571428571428571428571428571

نحصل على رقم فلكي مؤلف من 32 رقم نقوم بضربه مباشرة بمربع نصف القطر أي العدد 100 فنحصل على النتيجة التالية :

314.28571428571428571428571428571 سنيمتر مربع

هذا الرقم يمثل مساحة قاعدة المخروط الدائرية الشكل .

الآن نحسب مساحة سطح المخروط وهي تساوي سطح القاعدة ضرب الارتفاع المائل للمخروط :

3.1428571428571428571428571428571 ضرب 15 يساوي

47.142857142857142857142857142857 سنتيمتر مربع هي مساحة سطح المخروط .

---

🗁 تذكرة :

كما ذكرت سابقا فإن بإمكاننا أن نحسب الثابت باي **π بضغطة زر واحدة في الآلات الحاسبة العلمية التي تحوي زر حساب الثابت باي π ففي كل مرة نضغط فيها زر الثابت باي π فإن ذلك يعادل قيامنا بإدخال الرقم الفلكي**
3.1428571428571428571428571428571 الذي يمثله هذا الثابت .

فإذا طلب مني أن أضرب العدد 9 مثلا بالثابت باي **π فإنني أجري هذه العملية باستخدام الآلة الحاسبة بكل بساطة بالشكل التالي:**

**π**×9=

بالنسبة للمسائل التي تكون الأرقام فيها أرقاما فلكية كما هي الحال في المثال السابق فإن هنالك من يستخدم رمز الثابت باي π بدلا من الأرقام فيكتب مثلا :

$100\times \pi = 100\pi$

100 ضرب الثابت باي π يساوي مئة باي أو يساوي باي π ضرب 100 .

# حجم المخروط

يساوي حجم المخروط الكسر $\frac{1}{3}$ واحد على ثلاثة ضرب الثابت باي π ضرب نصف قطر قاعدة المخروط r الدائرية مرفوعا للقوة الثانية $r^2$ ضرب ارتفاع المخروط .

مثال :

لدينا مخروط يبلغ ارتفاعه 12 سنتمتر و يبلغ نصف قطر r قاعدته الدائرية 8 سنتمتر فكم يبلغ حجم هذا المخروط :

سنحسب حجم هذا المخروط بالطريقة الثانية أي دون أن نستخدم الأرقام الفلكية التي يحتمها علينا حساب الثابت باي π فنكتب:

$$V=\frac{1}{3}\pi\ (8)^2(12)=\frac{1}{3}\pi\ (64)(12)=$$

إن حجم المخروط (رمز الحجم هو الحرف V ) يساوي ثلث الثابت باي π أي الكسر 1 على 3 ضرب الثابت باي π ضرب نصف قطر قاعدة المخروط الدائرية مرفوعا للقوة الثانية $r^2$ – و هو هنا 8 مرفوع للقوة الثانية يساوي :

قمنا بتفكيك الرفع للقوة الثانية $8^2$ عن طريق ضرب العدد 8 بنفسه فحصلنا على 64 .

و لكن إذا كان المطلوب مني حل رقمي فلابد عندها من إجراء العمليات الحسابية على القيمة العددية التي يمثلها الثابت

باي **π** و عندها سيكون علينا التعامل حتما مع أرقام فلكية مؤلفة من أكثر من 30 خانة.

---

🗁 **لماذا نضرب بالكسر $\frac{1}{3}$ واحد على ثلاثة عند حساب حجم المخروط؟**

**لأن حجم المخروط يبلغ ثلث حجم أسطوانة لها القاعدة و الارتفاع ذاته.**

🗁 **تذكر دائما أن عملية ضرب عدد ما بالكسر $\frac{1}{3}$ واحد على 3 تعني تقسيم ذلك العدد على 3 فإذا أردت أن أحسب ثلث مقدار ما فإنني أضرب ذلك المقدار بالكسر $\frac{1}{3}$**

**أو أني أقوم بقسمة ذلك المقدار على 3.**

---

🗁 إن حجم الهرم يساوي ثلث حجم الموشور Prism .

---

# المربع

إذا قسمنا مربعا من الزاوية إلى الزاوية فإننا نحصل على مثلثين متساويي الساقين و قائمين و تبلغ قياسات زوايا كل من هذين المثلثين 90-45-45 .

لماذا يكون كل من هذين المثلثين متساويي الساقين؟

---

لأن كل مثلث من هذين المثلثين عبارة عن نصف مربع و أنتم تعلمون طبعا بأن أضلاع المربع متساوية في الطول , و لذلك فإننا عندما نقسم مربعا من الزاوية إلى الزاوية لنحصل على مثلثين فإن كل مثلث من هذين المثلثين يأخذ ضلعين متساويين بالطبع من أضلاع المربع و بالتالي فإن كل مثلث من هذين المثلثين يكون متساوي الساقين.

لماذا يكون قياس زوايا كل من المثلثين الذين نحصل عليهما من خلال قسمة المربع إلى مثلثين : 90-45-45 درجة ؟

لأننا عندما نقسم المربع إلى مثلثين اثنين فإن كل مثلث يأخذ ضلعين متساويين من أضلاع المربع و زاوية قائمة قياسها بالطبع 90 درجة .

أما الخط المنصف الذي يمتد من الزاوية إلى الزاوية و الذي يقسم المربع إلى مثلثين متطابقين فإنه يقسم و ينصف كذلك زاويتي المربع الباقيتين إلى أربع زوايا قياس كل منها 45 درجة .

$90 \div 2 = 45$

أي أن كل مثلث يأخذ زاوية قائمة و نصفي زاويتين قائمتين قياس كل منهما 45 درجة .

□ لحساب قياس أضلاع أو وتر أي مثلث من هذين المثلثين فإننا نطبق نظرية فيثا غورث في المثلث القائم و التي تقول بأن مربع تر المثلث يساوي مربع الضلع الأول زائد مربع الضلع الثاني:

إن وتر المثلث هو أطول أضلاع المثلث القائم ,فإذا كان مربع طول كل ضلع من ضلعي المثلث القائم الزاوية يساوي مربع خمسة فإن هذا يعني بأن مربع طول وتر المثلث يساوي :

5∧2+5∧2

$5^2+5^2=25+25=50$

**غير أنه يتوجب علينا أن نتذكر دائما بأن النتيجة التي حصلنا عليها تمثل مربع طول الوتر و ليس طول الوتر نفسه و لذلك حتى نحصل على طول الوتر فإن علينا أن نقوم بإجراء عملية معاكسة لعملية الرفع للقوة وهذه العملية المعاكسة للرفع للقوة هي بالطبع عملية إيجاد الجذر التربيعي**

لمربع طول الوتر و لذلك نقول بأن الجذر التربيعي للعدد 50 يساوي تقريبا 7 أي أن طول وتر هذا المثلث يساوي 7 تقريبا .

---

**لحساب الجذر التربيعي لعدد ما باستخدام الآلة الحاسبة**

**ادخل العدد الذي تريد حساب جذره التربيعي وليكن مثلا العدد 50 .**

**اضغط زر قياس الجذر التربيعي √.**

**نحصل على النتيجة :**

**7.0710678118654752440084436210485**

□ المحيط : هو قياس المسافة المحيطة بجميع زوايا الشكل الهندسي : محيط المثلث هو مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة .

محيط المربع هو مجموع أطوال أضلاعه الأربعة .

مساحة المثلث تساوي نصف ضرب القاعدة ضرب الارتفاع.

½×القاعدة×الارتفاع

مساحة أي مثلث قائم هي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه تقسيم 2 .

□متوازي الأضلاع Parallelogram :

متوازي الأضلاع شكل هندسي رباعي يكون كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين و متساويين .

في متوازي الأضلاع يكون كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول فإذا رسمنا قطرا يمتد من الزاوية إلى الزاوية ينصف متوازي الأضلاع إلى مثلثين فإننا نحصل على مثلثين متطابقين.

و إذا نصفنا متوازي الأضلاع بمنصفين متقاطعين على شكل حرف x فإننا نحصل على أربعة مثلثات كل اثنين متقابلين منها متطابقين .

---

المعين شكل هندسي رباعي الأضلاع أضلاعه الأربعة متساوية في الطول - يحتوي المعين على أربعة زوايا اثنتين منهما حادتين قياسهما أقل من 90 درجة و اثنتين منهما منفرجتين قياسهما أكبر من 90 درجةو كل زاويتين متقابلتين تكونان متطابقتين و متساويتين في القياس.

مساحة المعين تساوي نصف حاصل ضرب قطريه المنصفين ببعضهما البعض .

ليكن لدينا معين أطوال قطريه المنصفين 15 و 10 سنتمتر , و كما تعلمون فإن مساحة المعين تساوي نصف حاصل ضرب قطريه المنصفين مع بعضهما البعض أي:

½.10.15=75

$1/2\times10\times15=75$

نصف ضرب 10 ضرب 15 يساوي 75

---

□ ملاحظة تتعلق بضرب النصف أي الكسر ½ بعدد ما :

عندما نضرب عددا ما بالعدد واحد فإن ذلك العدد يبقى كما هو , أي أن النتيجة تبقى كما هي دون تغيير , أما عندما نضرب بنصف أي بالكسر ½ فإن عملية الضرب هذه تصبح بمثابة عملية قسمة , أي أننا عندما نضرب عددا ما بنصف فكأننا نقسم هذا العدد على 2 :

مثال :

$\frac{1}{2}\times12=6$

نصف ضرب 12 يساوي 6

$\frac{1}{2}\times10=5$

نصف ضرب 10 يساوي 5

$\frac{1}{2}\times100=50$

نصف ضرب 100 يساوي 50 .

هذه أشياء بسيطة غير أن عواقبها تكون وخيمة عندما نخطئ في التعامل معها , و لذلك حتى نفهم مسألة الضرب بنصف أو بالكسر ½ لا تنظر للأمر على أنه ضرب عدد ما بنصف و إنما انظر للمسألة على أنها ضرب النصف أو الكسر ½ بذلك العدد .

تذكر دائما بأن ضرب أي رقم بالعدد واحد لا يغير النتيجة و أن الرقم المضروب بالعدد واحد يبقى كما هو و بما أن النصف أقل من العدد واحد فمن الطبيعي أننا عندما نضرب بنصف أن نحصل على نتيجة أقل من الضرب بواحد و تحديدا فإن علينا أن نحصل على نصف العدد الذي ضربناه بنصف.

□مجموع زوايا كل من المربع و المستطيل 360 درجة :

$90\times4=360$

أربع زوايا قياس كل زاوية منها 90 درجة .

□شبه المنحرف trapezoids :

شبه المنحرف هو عبارة عن شكل رباعي يشبه مثلثا دون رأس .

يحتوي شبه المنحرف على ضلعين متوازيين يدعيان بالقواعد و ضلعين غير متوازيين يدعيان بالساقين.

كما يحتوي شبه المنحرف زاويتين منفرجتين قياسهما أكبر من 90 درجة و زاويتين حادتين قياسهما أقل من 90 درجة.

قياس مساحة شبه المنحرف:

---

لحساب مساحة شبه المنحرف فإننا نتخيل بأننا نرسم منصفا أفقيا يقلب شبه المنحرف بشكل أفقي إلى نصفين ثم إننا نقوم بقلب الجزء العلوي تماما كما تقوم سيارات القلاب التي تحمل مواد البناء بإفراغ حمولتها و عندها فإننا نحصل على شكل متوازي أضلاع و عندها فإننا نحسب مساحة ذلك الشكل كما نحسب مساحة متوازي الأضلاع .

**مساحة شبه المنحرف تساوي نصف ارتفاع شبه المنحرف ضرب مجموع قاعدتيه أي مجموع قياسي ضلعه العلوي و ضلعه السفلي.**

□ ليكن لدينا شبه منحرف مساحته 40 سنتمترمربع و طول قاعدته العليا يبلغ 3 سنتمتر بينما يبلغ طول قاعدته السفلى 5 سنتمتر .

كم يبلغ ارتفاع شبه المنحرف هذا؟

---

**تعرفون بأن مساحة شبه المنحرف تساوي نصف ارتفاعه ضرب مجموع قاعدتيه : أي ضلعه العلوي زائد ضلعه السفلي.**

و في مسألتنا هذه نقول:

إن مساحة شبه المنحرف هذا تساوي 40 سنتيمتر و هي تساوي نصف الارتفاع و هو هنا المجهول Y ضرب مجموع الضلع الأول 3 سنتمتر مع الضلع الثاني 5 سنتمتر.

---

**المساحة 40 = $\frac{1}{2}$ الارتفاع ضرب ( القاعدة العلوية 3سنتمتر + القاعدة السفلية 5 سنتمتر)**

**40 = ½ الارتفاع ضرب( 3+5)**

$$40=\frac{1}{2}Y(3+5)$$

**حصلنا على معادلة المجهول فيها هو ارتفاع شبه المنحرف و ليكن مثلا المتغير Y .**

**الآن نجري عملية جمع قاعدتي شبه المنحرف**

**3+5=8**

**فتصبح المعادلة على الشكل التالي:**

**40=1/2 Y.8**

$$40=\frac{1}{2}Y\times 8$$

**بالطبع فإن المجهول Y هو ارتفاع شبه المنحرف.**

نجري عملية ضرب الكسر 1 على 2 بالعدد 8 :

$\frac{1}{2} \times 8 = 4$

و بذلك نكون قد تخلصنا من حدين و بقي لدينا العدد 4 فتصبح المعادلة على الشكل التالي :

$40 = 4Y$

أي أن مساحة شبه المنحرف هذا الذي تبلغ 40 سنتمتر تساوي 4 سنتمتر ضرب المجهول Y الذي هو ارتفاع شبه المنحرف ..

و انتم تعلمون بالطبع بأن 4Y تعني $4 \times Y$ , إذا فإن لدينا معادلة تحوي عملية ضرب و لحل هذه المعادلة فإننا نعكس عملية الضرب أي أننا نحول عملية الضرب إلى عملية قسمة .

و لكن علينا الانتباه إلا أننا نجري عملية القسمة بين معلومي المعادلة إذ لا فائدة ترجى من إجراء العمليات الرياضية على المجاهيل و لذلك فإننا نجري عملية القسمة بين معلومين بحيث يكون المجهول هو ناتج عملية القسمة .

فنكتب:

$40 \div 4 = y$

$40 \div 4 = 10$

إذا فإن المجهول Y الذي هو ارتفاع شبه المنحرف يساوي 10 سنتمتر .

□ تذكر دائما :

---

عندما نضرب بواحد فإن النتيجة تبقى كما هي دون تغيير و عندما نضرب بما هو أقل من واحد فإن النتيجة يجب أن تكون أقل من نتيجة الضرب بالعدد واحد , و لذلك فإننا عندما نضرب بكسر فإن الأمر هو بمثابة قسمة , و عندما نضرب بنصف أي بالكسر ½

فإن الأمر يشبه القسمة على 2 .

تذكر دائما عندما نضرب عددا ما بكسر فإن علينا أن ننظر إلى الأمر بأنه عملية ضرب لذلك الكسر بالعدد و ليس العكس فعندما نضرب العدد 8 بالكسر نصف أي ½ فإن علينا أن ننظر للأمر على أنه عملية ضرب للكسر نصف ½ بالعدد ثمانية و ليس العكس فنقول بأن الأمر عبارة عن نصف مكرر 8 مرات أي أربعة .

أي أن ½ ضرب العدد 8 هي عبارة عن :

½+½+½+½+½+½+½+½=4

و من الممكن أن ننظر إلى مسألة الضرب بكسر على أنها عملية قسمة فإذا ضربنا عددا ما بالكسر نصف ½ فإن الأمر يماثل قسمة ذلك العدد على 2 :

$10\times1/2=10\div2=5$

10 ضرب ½ تساوي 10 تقسيم 2 تساوي 5

---

# الأشكال الخماسية – البنتاغون Pentagon

يتم حساب مساحة الشكل الخماسي عن طريق تقسيمه إلى مثلثات و حساب مساحة كل مثلث على حدى ثم جمع مساحات المثلثات كلها مع بعضها البعض لاحقا .

تحسب مساحة المثلث وفق القاعدة التالية :

نصف طول القاعدة ضرب ارتفاع المثلث يساوي المساحة .

لنفترض بأن ارتفاع مثلث ما 10 سنتمتر و طول قاعدته 5 سنتمتر فإن ذلك يعني بأن مساحة هذا المثلث تساوي:

A= (½ ×6) ×5=15

$$A=(\frac{1}{2}\times6)\times5=15$$

و بالطبع فإن ½ ضرب 6 يساوي 3

مساحة المثلث A تساوي الكسر ½ ضرب طول قاعدة المثلث ضرب ارتفاع المثلث.

□تذكر دائما :

□ الضرب بالكسر نصف يعني أحد أمرين:

الأول أن نضرب الكسر نصف بهذا العدد فنقول نصف ضرب 6 يساوي ستة أنصاف أي ثلاثة .

الثاني أن نقسم العدد الذي نريد ضربه بالكسر نصف على 2 فنقول :

6÷2=3

□ يحصل ارتباك عند الطالب عندما يضرب بكسر ما لأنه يتوقع دائما أن تعطي عملية الضرب نتيجة أكبر من العدد المضروب فهو لا يتوقع أن يحصل على نتيجة عند الضرب تعادل نصف أو ربع أو ثلث العدد المضروب .

A رمز المساحة Area

---

**كيف نضرب بكسر باستخدام الآلة الحاسبة؟**

**ندخل الكسر الذي نريد ضربه بعدد ما إلى الآلة الحاسبة و ليكن مثلا الكسر ثلث أي واحد على ثلاثة $\frac{1}{3}$.**

**كيف ندخل الكسر إلى الآلة الحاسبة الاعتيادية؟**

**ندخل الكسر على شكل عملية قسمة أي أننا نقسم البسط على المقام فنقول بأن الكسر $\frac{1}{3}$ واحد على ثلاثة هو عبارة عن :**

**واحد تقسيم ثلاثة**

**1/3**

**1÷3**

**نضغط زر إشارة الضرب × أو النجمة.**

**ندخل العدد الذي نريد ضربه بالكسر و ليكن مثلا العدد 9 .**

نضغط زر المساواة =

نحصل على نتيجة عملية الضرب و هي العدد 3 .

---

عملية الضرب بالكسر $\frac{1}{3}$ واحد على ثلاثة تماثل عملية القسمة على ثلاثة.

□إن مساحة الأشكال الرباعية الأضلاع هي ناتج ضرب القاعدة في الارتفاع .

الارتفاع في المثلث هو المسافة العمودية الممتدة بين رأس المثلث و بين قاعدته .

أما في في الأشكال المتوازية فإن الارتفاع هو المسافة العمودية (غير المائلة) الممتدة بين القاعدتين.

إن الحالة الوحيدة التي يمكن اعتبار الضلع أو الجانب بمثابة ارتفاع هي الحالة التي يصنع فيها ذلك الضلع زاوية قائمة مع قاعدة ذلك الشكل لأن هذا يدل على أن ذلك الضلع ليس ضلعا مائلا.

فإذا كان ارتفاع شكل رباعي 5 سنتمتر و كان طول قاعدته 10 سنتمتر فإن مساحته تساوي :

$10\times5=50$

50 سنتمتر مربع.

□مساحة المربع تساوي الضلع ضرب الضلع أو أنها تساوي طول الضلع مرفوعا للقوة الثانية.

---

## □ الإحداثيات:

مر معنا سابقا كيف يمكننا تمثيل الأعداد السالبة و الموجبة على شكل مستقيمين متعامدين يتقاطعان في نقطة الصفر و يمتدان إلى ما لا نهاية و كيف أن الأعداد السلبية تشغل ما تحت الصفر في المستقيم العمودي بينما تشغل الأعداد الموجبة ما فوق الصفر في ذلك المستقيم و كيف أن الأعداد الموجبة تشغل يمين الصفر في المحور الأفقي بينما تشغل الأعداد السلبية يسار الصفر في ذلك المحور.

و إذا كان لمستقيمين ما زاوية الميل ذاتها أي أنهما كانا مستقيمين متوازيين , أي أن أحدهما لا ينحرف باتجاه الآخر, فإن هذا يعني بأنهما لا يمكن أن يتقاطعا مهما امتدا أي أنهما متوازيين أي أن المسافة ذاتها تبقى ثابتة بينهما مهما امتدا.

فإذا كان لدينا محور الأعداد العمودي Y و كان محور الأعداد الأفقي X و كان لدينا مستقيمين استطعنا تمثيلهما بمعادلتين نتيجتهما واحدة , أي أنهما تشيران إلى رقم واحد و زاوية ميل واحدة فإذا عرفنا إحد اثيات هذين المستقيمان يمكنك معرفة ما إذا كانا متوازيين أو غير متوازيين.

فإذا كانت أحد اثيات المستقيم الأول هي :

$$4\times(-3)=(-12)$$

و إذا كانت إحد اثيات المستقيم الثاني:

$$2\times(-6)=(-12)$$

فإن هذا يعني بأن هذين المستقيمين متوازيين لأن قياس كل منهما حسب المعادلة هو ناقص 12-

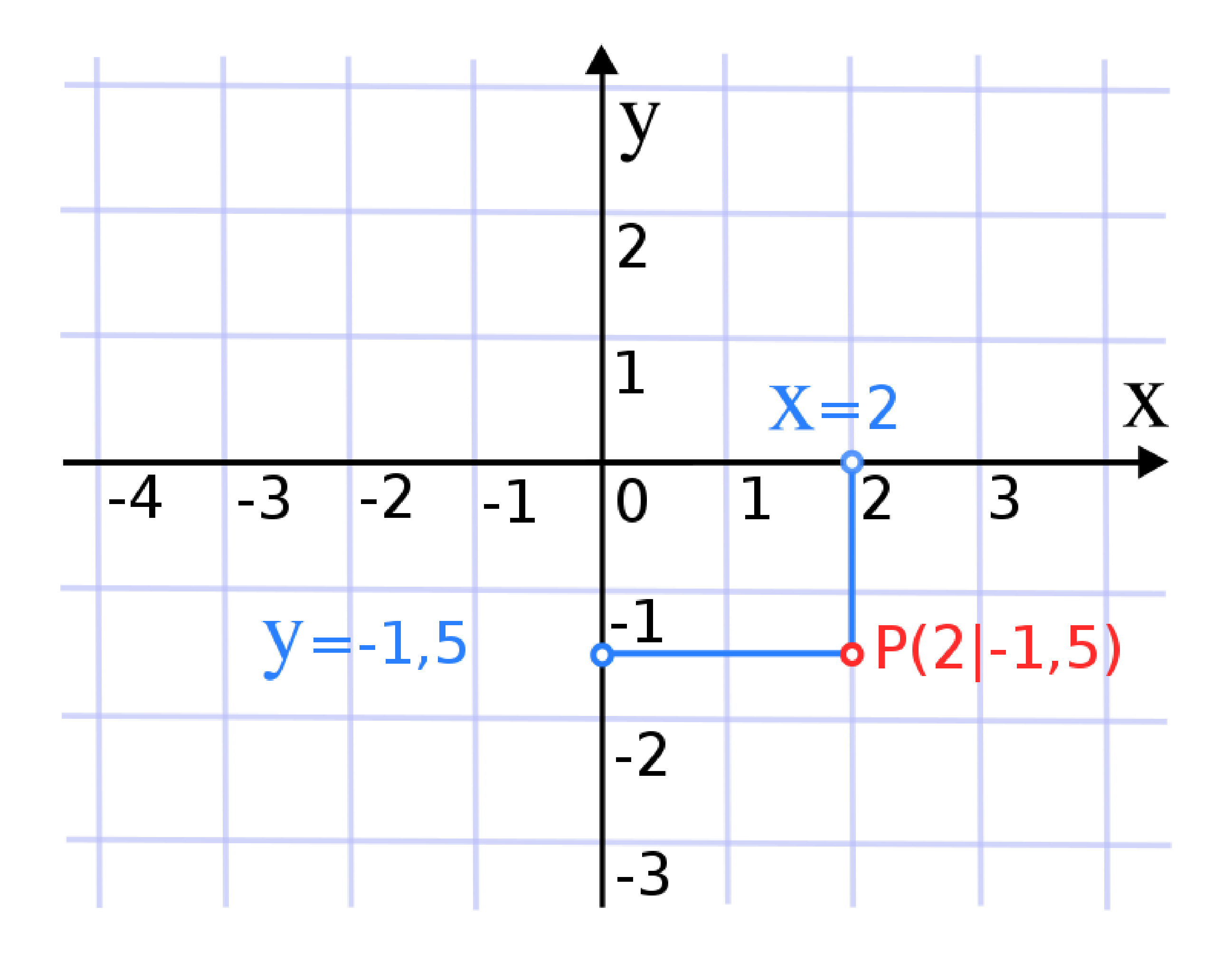
أي أن هذا يعني بأن لهذين المستقيمين درجة الانحراف ذاتها و زاوية الميل ذاتها أي أنهما مهما امتدا فإنهما لن يلتقيان.

و في حال لم تكن زاوية ميل أحد المستقيمين متطابقة تماما مع زاوية ميلان المستقيم الآخر و في حال كان هنالك اختلاف بسيط بين زاويتي ميلان المستقيمين فإن ذلك الانحراف البسيط سيؤدي حتما إلى تقاطع أحد المستقيمين مع المستقيم الآخر.

تدعى المعادلات التي تصور إحداثيات هندسية بالمعادلات الخطية linear equations .

حتى تمثل المعادلات الخطية مستقيمين متعامدين فإنه يتوجب أن تكون درجتي ميلان هذين المحورين ذات إشارتين متعاكستين أي أن تكون درجة ميلان أحدهما موجبة بينما يتوجب أن تكون درجة ميلان الثاني سالبة .

□ يكون المحور الصاعد ذو ميلان موجب بينما يكون المحور الهابط ذو ميلان سالب.




□ نستطيع بمحور واحد فقط أن نعبر عن معادلة ذات إحد اثيتين إحدا هما الصفر لأن الصفر يمثل نقطة مشتركة بين كلا المحورين المتعامدين الذين نستخدمهما للتعبير عن موقع نقطة ما .

النقاط التي تكون إحدى إحداثيتيها الصفر تكون ملاصقة إما للمحور الأفقي أو المحور العمودي.

□ المحور الأفقي ذو ميلان مساوي للصفر بينما يكون ميلان المحور العمودي غير محدود .

## □ الجذر التربيعي square root

جذر AB يساوي جذر A ضرب جذر B .

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$$

الجذر التربيعي للعدد 50 يساوي الجذر التربيعي للعدد 10 ضرب الجذر التربيعي للعدد 5 :

$$\sqrt{50} = \sqrt{10} \times \sqrt{5}$$

الجذر التربيعي للعدد 9 يساوي الجذر التربيعي للعدد 3 ضرب الجذر التربيعي للعدد 3 .

الخاصية التبديلية The commutative property :

تعني الخاصية التبديلية بأن ترتيب العناصر لا يؤثر على النتيجة , بمعنى أننا مهما غيرنا ترتيب العناصر الداخلة في العملية الرياضية فإن ذلك لن يؤثر على النتيجة .

□ الجمع عملية تبديلية : بمعنى أننا مهما بدلنا مواقع الأعداد الداخلة في عملية الجمع فإن ذلك لا يؤثر على نتيجة عملية الجمع .

مثال :

30+50=50+30

مثال آخر :

$1+2+3+4 = 4+3+2+1 = 2+1+4+3 = 3+4+1+2 = 4+3+1+2$

$4+3+2+1$ تساوي $1+2+3+4$ تساوي $2+1+4+3$ تساوي $3+4+1+2$ تساوي $4+3+1+2$

مهما بدلنا و قلبنا مواقع الأعداد التي تدخل في عملية الجمع فإن النتيجة لا تتغير .

مثال : مهما بدلنا مواقع الأعداد 1,2,3,4 ضمن عملية الجمع فإن النتيجة تبقى 10 .

□ الضرب عملية تبديلية :

مهما غيرنا مواقع الأعداد الداخلة في عملية الضرب فإن ذلك لا يؤثر على نتيجة عملية الضرب :

$3\times4=4\times3$

$4\times3=12$

$3\times4=12$

□ إذا كانت المعادلة الرياضية التي تحوي أقواس كلها عمليات جمع أو ضرب فيمكننا أن نزيل الأقواس و يمكننا أن نغير موقعها كما نريد دون أن تتغير النتيجة النهائية .

مثال :

$1+(2+3)+4=(1+2)+(3+4)$

$1\times(2\times3)\times4=(1\times2)\times(3\times4)$

انتبه :

الخاصية التبديلية لا تؤثر على نتيجة المعادلة إذا كانت المعادلة الرياضية كلها عبارة عن عمليات جمع أو إذا كانت كلها عبارة عن مجموعة من عمليات الضرب .

**تنبيه :**

**بالرغم من أن كلا من عمليتي الجمع و الضرب عمليتين تبديليتين ,أي أن ترتيب العناصر لا يؤثر على النتيجة النهائية فإن الخاصية التبديلية لا تنطبق على العمليات التي الرياضية تتألف من مزيج من عمليات الضرب و عمليات الضرب:**

**مثال :**

$1+(2\times3)\neq(1+2)\times3$

$1+(2\times3)=7$

$(1+2)\times3=9$

□ **عملية الطرح ليست عملية تبديلية :**

$100 - 90 \neq 90 - 100$

**100 ناقص 90 لا تساوي 90 ناقص 100 .**

إذا اكتشفتم أية أخطاء أو إذا كان لديكم أية خبرات تودون مشاركة الآخرين بها فلا تترددوا في إرسالها لنا.

تم بعون الله تعالى وحده

الرياضيات القابلة للفهم

د. عمار شرقية

Plant.kingdom1111@gmail.com

thenonterrorist@outlook.com

لا تنسونا من صالح دعائكم

هوامش :

معاملCoefficient -بضم الميم .

متعامد Perpendicular

مستقيم معترض Transversal

| [kəʊɪ'fɪʃnt,] كو إيفيشنت |
|---|

□ الثلاثيات الفيثاغورثية Pythagorean Triple

هنالك قياسات تناسب نظرية فيثاغورث تدعى بالثلاثيات الفيثاغورثية و هذه القياسات المثالية تناسب قياسات ضلعي المثلث القائم و وتره :

3-4-5

6-8-10

30-40-50

5-12-13

8-15-17

3^2-4^2-5^2

$3^2-4^2-5^2$

---

---

Right triangle

المعين rhombus [rhom·bus || 'rɑmbəs / 'rɒm-]

المنصف القطري الذي يمتد من الزاوية إلى الزاوية -دايا غنال. [diagonal || daɪ'ægənl

---

من الزاوية للزاوية Corner to corner

متساوي الساقين Isosceles [-ɒs'-/ aɪ'sɑsɪlɪ:z آيزوسيليز

مثلث قائم Right triangle

المحيط : Perimeter [(pə'rɪmɪtə(r)]

---

المتغير Variable

القوة السالبة -الأس السالب. Negative power

عملية ضرب تصالبي . Cross-multiplying

---

□ الكتلة الجزيئية Molecular mass : و تدعى كذلك باسم آخر أقل صحة و هو الوزن الجزيئي MW - molecular weight و يشير هذا المصطلح إلى كتلة جزيء واحد من الجزيئات التي تؤلف مادة ما .

تذكر دائما أن الذرة هي أصغر جزء في العنصر تحتفظ بصفاته بينما الجزيء هو أصغر جزء في المادة يحتفظ بصفاتها - جزيء الماء هو أصغر جزء من الماء يتميز بصفات الماء أي أن اندماج ذرات الهيدروجين و الأوكسجين مع بعضهما ينتج جزيء الماء .

□ كيف نحسب الكتلة الجزيئية أو الوزن الجزيئي لجزيء ما ؟

بما أن الجزيء هو أصغر عنصر في المادة ( جزيء الماء مثلا ) و بما أن الجزيء يتألف من ذرات العناصر التي تكون ذلك الجزيء ( ذرات الأوكسجين و الهيدروجين مثلا ) فنقول ببساطة شديدة بأن الكتلة الجزيئية أو الوزن الجزيئي لجزيء ما يساوي مجموع الكتل الذرية atomic masses أو مجموع الأوزان الذرية لجميع الذرات التي تدخل في تركيب ذلك الجزيء.

الكتلة الذرية أو الوزن الجزيئي لجزيء الماء (مثلا ) يساوي الكتلة الذرية لذرتي الهيدروجين التين تدخلان في تركيبه + الكتلة الذرية لذرة الهيدروجين التي تدخل في تركيب جزيء الماء.

يمكن قياس الكتلة الجزيئية لجزيء ما باستخدام مقياس طيف الكتلة mass spectrometry .

نحصل على الكتلة الذرية أو الوزن الذري للعناصر من الجدول الدوري للعناصر periodic table.

في عمليات الجمع عندما يكون ناتج جمع عددين أكبر من العدد 9 فإننا ننقل العدد الزائد إلى الخانة التالية :

1+9=10

نضع صفر في النتيجة ثم ننقل الواحد إلى الخانة التالية لنضيفه إلى حصيلة جمع الخانة التالية :

31

+29

------

60

أما في عمليات الطرح عندما يكون المطروح منه أصغر من المطروح كما في الحالة 2-7

فإننا نستعير عددا من الخانة التالية و نجري عملية الطرح.

□ عند إجراء عمليات طرح ذهنية يوصى بأن نفكر في عملية الطرح كعملية جمع و ليس كعملية طرح فإذا سألني أحدهم عن ناتج طرح 315 من 500 فإن علي ان أسأل نفسي كم يحتاج الرقم 315 حتى يصبح 500 و سأجد عندها بان عملية الطرح الذهنية ستصبح أكثر سهولة .

□ مفهوم عملية القسمة :

100÷5=

ما هو العدد الذي إذا ضربناه بخمسة يكون الناتج 20 ؟

عملية القسمة معاكسة لعملية الضرب.

Round up يقرب عددا نحو عدد أكبر منه

Round down يقرب رقما نحو رقم أدنى منه

Carry over a digit يحمل عددا إلى خانة أعلى , أو يضيف عددا إلى خانة أعلى.

الأس , القوة exponent : يدلنا الأس أو القوة على عدد المرات التي يجب أن نضرب العدد الأساس بنفسه .

مثال $5^5$ أي خمسة مرفوعة للقوة 5 تعني بأن علي أن أضرب العدد الأساس 5 بنفسه خمس مرات .

نرمز للأس أو الرفع للقوة أحيانا بإشارة ^ ويدج نضعها بين الأس و الأساس فنكتب :

$3^5=3^5=3\times3\times3\times3\times3=243$

يضيف Putting together

يحذف Taking apart

the addend المضاف

المجموع Sum

the ones الآحاد

العشرات The tens

المئات The hundreds

الحمل Carry

Base number الأساس

Exponent الرفع للقوة -الأس

Numeratorالبسط

The denumerator المقام

the devision bar — الخط الأوسط في الكسر